

# Représentations cohomologiques isolées, applications cohomologiques

N. Bergeron

## Introduction

Un groupe de Lie  $G$  a la propriété (T) de Kazhdan si la représentation triviale de  $G$  est isolée dans le dual unitaire  $\widehat{G}$  de  $G$ , muni de sa topologie de Fell. D'après Kazhdan [17] et Kostant [20], un groupe semi-simple réel  $G$  a la propriété (T) si et seulement s'il est sans facteur simple localement isomorphe à  $SO(n, 1)$  ( $n \geq 2$ ) ou  $SU(n, 1)$  ( $n \geq 1$ ). La représentation triviale du groupe  $G = SO(n, 1)$ ,  $n \geq 2$  (resp.  $G = SU(n, 1)$ ,  $n \geq 1$ ) n'est en particulier pas isolée dans le dual unitaire de  $G$ . Selberg montre néanmoins dans [28] qu'il subsiste une propriété d'isolation, de nature arithmétique, dans le cas du groupe  $G = SL(2, \mathbb{R})$  (localement isomorphe au groupe  $SO(2, 1)$ ) : la représentation triviale du groupe  $G$  est isolée dans le sous-ensemble de  $\widehat{G}$  constitué de toutes les représentations apparaissant faiblement dans l'une des représentations quasi-régulières  $L^2(\Gamma(N) \backslash G)$  avec  $N \in \mathbb{N}$  et  $\Gamma(N) = \ker(SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow SL(2, \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}))$ .

Fixons plus généralement  $G$  une groupe semi-simple algébrique sur  $\mathbb{Q}$ . Soit  $G(\mathbb{R})^0$  la composante neutre de  $G(\mathbb{R})$  : c'est un produit de groupes semi-simples réels. Nous notons

$$G(\mathbb{R})^0 = U \times G^{\text{nc}},$$

où  $U$  est compact et  $G^{\text{nc}}$  est un groupe semi-simple réel sans facteur compact. Un sous-groupe  $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$  est dit *de congruence* s'il existe un sous-groupe compact-ouvert  $K_f$  de  $G(\mathbb{A}_f)$  (où  $\mathbb{A}_f$  désigne l'anneau des adèles finis sur  $\mathbb{Q}$ ) tel que  $\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K_f$ . Suivant Burger et Sarnak [11], on appelle *spectre* de  $\Gamma \backslash G$  - où  $\Gamma$  est un sous-groupe de congruence de  $G$  - l'ensemble des représentations irréductibles unitaires  $\pi \in \widehat{G}$  apparaissant (faiblement, si  $G$  est isotrope sur  $\mathbb{Q}$ ) dans la représentation régulière de  $G$  dans  $L^2(\Gamma \backslash G)$  :

$$\sigma(\Gamma \backslash G) = \{\pi \in \widehat{G} : \pi \propto L^2(\Gamma \backslash G)\}. \quad (0.1)$$

Rappelons également la définition du dual automorphe  $\widehat{G}_{\text{Aut}}$  de  $G$  donnée dans [11] :

$$\widehat{G}_{\text{Aut}} = \overline{\cup_{\Gamma \text{ cong}} \sigma(\Gamma \backslash G)}. \quad (0.2)$$

Le Théorème de Selberg mentionné plus haut affirme alors que si  $G = SL(2)_{|\mathbb{Q}}$ , la représentation triviale  $1_G$  de  $G$  est **isolée** dans le dual automorphe  $\widehat{G}_{\text{Aut}}$ . Cette propriété, appelé *propriété  $\tau$*  est en fait vraie pour tout groupe  $G$  comme ci-dessus, cf. la démonstration de la Conjecture  $\tau$  par Clozel [15].

Dans cet article nous étudions des généralisations de la propriété (T) et de la propriété  $\tau$ . La représentation triviale de  $G$  est l'exemple le plus simple d'une **représentation cohomologique**, c'est-à-dire (essentiellement, cf. §1 pour une définition précise) d'une représentation pouvant intervenir dans la cohomologie d'une variété localement symétrique. La représentation triviale est cohomologique de degré 0, elle intervient dans les fonctions constantes. Les généralisations des propriétés (T) et  $\tau$  que nous avons en vus ont traités aux deux problèmes suivants :

**Problème 0.1** *Décrire les représentations isolées dans  $\widehat{G}$  parmi les représentations cohomologiques.*

**Problème 0.2** *Pour  $G/\mathbb{Q}$  donné, soit  $\pi \in \widehat{G}$  une représentation cohomologique non triviale et non isolée. La représentation  $\pi$  est-elle isolée dans  $\widehat{G}_{\text{Aut}} \cup \{\pi\}$  ?*

Remarquons immédiatement qu'il existe une classe simple de représentations pour lesquelles les deux questions ont une solution négative : la classe des représentations cohomologiques tempérées, cf. [7]. Le but de cet article est d'apporter des réponses tantôt conjecturale tantôt inconditionnelles à ces deux problèmes. Le Problème 0.1 a en fait déjà été complètement résolu par Vogan, dans un article longtemps clandestin [33]. Sa solution est difficile, nous en donnons, au §1 une démonstration "élémentaire" au sens où nous n'utilisons "que" la classification, par Vogan et Zuckerman [36], [34], des représentations cohomologiques.

Le Problème 0.2 est encore plus profond : l'un des buts de cet article (cf. §3) est d'expliquer comment sa solution est implicitement donnée par les Conjectures d'Arthur. Nous montrons au §4 que ce Problème n'est en tout cas pas gratuit en obtenant un certain nombre de conséquences cohomologiques, pour certaines nouvelles, concernant les variétés arithmétiques.

Illustrons immédiatement nos résultats par un exemple. Soit  $G$  un groupe semi-simple algébrique sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $G^{\text{nc}} = O(p, q)^0$ . Supposons de plus que  $G$  ne provient pas d'un groupe de type  ${}^{3,6}D_4$ . Soit  $\mathfrak{q}$  une sous-algèbre parabolique de l'algèbre de Lie complexifiée de  $O(p, q)$ , stable par l'involution de Cartan. Soit  $L$  la composante connexe du normalisateur de  $\mathfrak{q}$  dans  $O(p, q)^0$ . Supposons qu'il existe un entier naturel  $r$ ,  $2r \leq q$ , tel que

$$L \cong U(1)^r \times O(p, q - 2r)^0. \quad (0.3)$$

Dans [36] Vogan et Zuckerman associent à  $\mathfrak{q}$  une représentation cohomologique  $A_{\mathfrak{q}}$  intervenant en degré  $R = pr$ . (Les rôles de  $p$  et  $q$  pourraient naturellement être échangés.)

Le théorème de Vogan (réponse au Problème 0.1) dont nous donnons une démonstration "élémentaire" au §1 implique le théorème suivant.

**Théorème 0.3** *La représentation cohomologique  $A_{\mathfrak{q}}$  est isolée dans le dual unitaire du groupe  $O(p, q)^0$  si et seulement si  $p \geq 2$ ,  $q \geq 2r + 2$  et  $p + q \geq 2r + 5$ .*

Concernant le Problème 0.2, la Conjecture 3.1 que nous motivons au §3 implique la conjecture suivante.

**Conjecture 0.4** *Pour tout entier naturel  $r \leq q/2$ , la représentation cohomologique  $A_{\mathfrak{q}}$  est isolée dans  $\widehat{G}_{\text{Aut}} \cup \{A_{\mathfrak{q}}\}$ .*

Ces considérations nous permettent de montrer le théorème suivant au §4.

**Théorème 0.5** *Supposons la représentation  $A_q$  isolée dans  $\{A_q\} \cup \widehat{G}_{\text{Aut}}$  (c'est en particulier le cas si  $p \geq 2$ ,  $g \geq 2r + 2$  et  $p + q \geq 2r + 5$ , cf. Thm. 0.3). Il existe alors un sous-groupe de congruence  $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$  tel que la représentation  $A_q$  intervienne discrètement dans  $L^2(\Gamma \backslash G)$ .*

Notons  $X_{p,q}$  l'espace symétrique associé au groupe  $O(p, q)^0$ . Supposons  $p \leq q$ . À l'aide de la formule de Matsushima (cf. §1) le Théorème ci-dessus (et un peu plus lorsque  $p = 1$ ) implique(nt) :

**Théorème 0.6** *Pour tout sous-groupe de congruence  $\Gamma$  suffisamment profond, le  $p$ -ième nombre de Betti de l'espace localement symétrique  $\Gamma \backslash X_{p,q}$  est non nul.*

Il y a une littérature abondante sur ce type de résultats le Théorème 0.5 est en particulier dû à Li [24] lorsque  $r < \frac{1}{4}(p + q - 2)$ , il en déduit le Théorème 0.6 pour  $p + q \geq 7$ . Les premiers résultats de ce type ont été obtenus par Millson dans le cas du groupe  $O(1, n)$ .

Pour finir, nous montrons, au §5, un résultat, dont nous pensons qu'il est intéressant par lui-même, qui permet de ramener, dans un grand nombre de cas, le Problème 0.2 au cas où le groupe  $G^{\text{nc}} = O(n, 1)^0$  ou  $SU(n, 1)$ , tous deux explorés en détails dans [7].

## 1 Un théorème de Vogan

Dans cette section  $G = G^{\text{nc}}$ . Le groupe  $G$  est donc semi-simple réel et connexe. Fixons  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G$ . Notons  $\mathfrak{g}_0$  l'algèbre de Lie de  $G$  et  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 \oplus \mathfrak{p}_0$  la décomposition associée au choix de  $K$ . Si  $\mathfrak{l}_0$  est une algèbre de Lie, nous noterons  $\mathfrak{l} = \mathfrak{l}_0 \otimes \mathbb{C}$  sa complexification.

Rappelons qu'un  $(\mathfrak{g}, K)$ -module est un espace vectoriel complexe  $V$  muni de représentations de  $\mathfrak{g}$  et  $K$ , soumises aux trois conditions suivantes.

1. L'action de  $K$  sur  $V$  est *localement finie*, i.e. tout vecteur  $v \in V$  appartient à un sous-espace  $K$ -invariant  $V_1 \subset V$  de dimension finie, et la représentation de  $K$  dans  $V_1$  est lisse.
2. La différentielle de l'action de  $K$  (qui est bien définie d'après 1.) est égale à la restriction à  $\mathfrak{k}$  de l'action de  $\mathfrak{g}$ .
3. Si  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $k \in K$  et  $v \in V$ , alors  $k \cdot (X \cdot v) = (\text{Ad}(k)X) \cdot (k \cdot v)$ .

Si  $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$  est une représentation continue de  $G$  dans un espace de Hilbert, l'espace des vecteurs lisses et  $K$ -finis de  $\pi$  est un  $(\mathfrak{g}, K)$ -module appelé *module de Harish-Chandra* de  $\pi$ .

Soit maintenant  $(\pi, V_\pi)$  un  $(\mathfrak{g}, K)$ -module irréductible. À tout réseau  $\Gamma \subset G$ , on peut naturellement associer une application linéaire

$$T_\pi(\Gamma) : \begin{cases} \text{Hom}_K(\bigwedge^* \mathfrak{p}, \pi) \otimes \text{Hom}_{\mathfrak{g}, K}(\pi, C^\infty(\Gamma \backslash G)) & \rightarrow \mathcal{E}^*(S(\Gamma)), \\ \psi \otimes \varphi & \mapsto \varphi \circ \psi, \end{cases} \quad (1.1)$$

à valeurs dans l'espace  $\mathcal{E}^*(S(\Gamma))$  des formes différentielles sur  $S(\Gamma) = \Gamma \backslash G/K$ . L'application  $T_\pi(\Gamma)$  associe donc à certains  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules  $\subset C^\infty(\Gamma \backslash G)$  des formes différentielles sur  $S(\Gamma)$ , l'action du laplacien de Hodge-de Rham sur les formes différentielles est induit par l'action de l'opérateur de Casimir

$$\Omega = \sum_{1 \leq s \leq n} y_s \cdot y'_s$$

où  $(y_s)$  est une base de  $\mathfrak{g}$  et  $(y'_s)$  la base duale de  $\mathfrak{g}$  par rapport à sa forme de Killing, sur  $\pi$ . Un  $(\mathfrak{g}, K)$ -module ne peut donc éventuellement intervenir dans la cohomologie d'une variété localement symétrique  $S(\Gamma)$  que s'il est unitaire et vérifie

1.  $\pi(\Omega) = 0$ , et
2.  $\text{Hom}_K(\bigwedge^* \mathfrak{p}, \pi) \neq \{0\}$ .

Un  $(\mathfrak{g}, K)$ -module vérifiant les points 1. et 2. ci-dessus est dit *cohomologique*, il est équivalent de dire que sa  $(\mathfrak{g}, K)$ -cohomologie est non triviale. Rappelons que la  $(\mathfrak{g}, K)$ -cohomologie de  $\pi : H^*(\mathfrak{g}, K; \pi)$ , est la cohomologie du complexe

$$C^*(\mathfrak{g}, K; \pi) := \text{Hom}_K(\bigwedge^* \mathfrak{p}, \pi),$$

muni de la différentielle définie pour  $\omega \in C^p(\mathfrak{g}, K; \pi)$  par la formule :

$$d\omega(X_0, \dots, X_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i X_i \cdot \omega(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_p).$$

D'après Parthasarathy [25], Kumaresan [21] et Vogan-Zuckerman [36], les représentations cohomologiques sont associées aux sous-algèbres paraboliques  $\theta$ -stable de  $\mathfrak{g}$ . Rappelons en la définition. Notons  $\mathfrak{t}_0 = \text{Lie}(T)$  une sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{k}_0$ . Une *sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable*  $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(X) \subset \mathfrak{g}$  est associée à un élément  $X \in i\mathfrak{t}_0$ . Elle est égale à la somme

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u},$$

du centralisateur  $\mathfrak{l}$  de  $X$  et du sous-espace  $\mathfrak{u}$  engendré par les racines positives de  $X$  dans  $\mathfrak{g}$ . Alors  $\mathfrak{q}$  est stable sous  $\theta$ ; on en déduit une décomposition  $\mathfrak{u} = (\mathfrak{u} \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ . Soit  $R = \dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$  (*degré fortement primitif*).

Associé à  $\mathfrak{q}$ , se trouve un  $(\mathfrak{g}, K)$ -module irréductible bien défini  $A_{\mathfrak{q}}$  que nous caractérisons maintenant. Supposons effectué un choix de racines positives pour  $(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  de façon compatible avec  $\mathfrak{u}$ . Soit  $e(\mathfrak{q})$  un générateur de la droite  $\bigwedge^R(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ . Alors  $e(\mathfrak{q})$  est le vecteur de plus haut poids d'une représentation irréductible  $V(\mathfrak{q})$  de  $K$  contenue dans  $\bigwedge^R \mathfrak{p}$ ; et dont le plus haut poids est donc nécessairement  $2\rho(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ . La classe d'équivalence du  $(\mathfrak{g}, K)$ -module  $A_{\mathfrak{q}}$  est alors uniquement caractérisée par les deux propriétés suivantes.

$$A_{\mathfrak{q}} \text{ est unitarisable avec le même caractère infinitésimal que la représentation triviale} \quad (1.2)$$

$$\text{Hom}_K(V(\mathfrak{q}), A_{\mathfrak{q}}) \neq 0. \quad (1.3)$$

Remarquons que la classe du module  $A_{\mathfrak{q}}$  ne dépend que de l'intersection  $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$ , autrement dit deux sous-algèbres paraboliques  $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$  et  $\mathfrak{q}' = \mathfrak{l}' \oplus \mathfrak{u}'$  vérifiant  $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{u}' \cap \mathfrak{p}$  donnent lieu à une même classe de module cohomologique.

De plus,  $V(\mathfrak{q})$  intervient avec multiplicité 1 dans  $A_{\mathfrak{q}}$  et  $\bigwedge^R(\mathfrak{p})$ , et

$$H^i(\mathfrak{g}, K, A_{\mathfrak{q}}) \cong \text{Hom}_{L \cap K}(\bigwedge^{i-R}(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}), \mathbb{C}). \quad (1.4)$$

Ici  $L$  est un sous-groupe de  $K$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{l}$ .

Le théorème fondamental suivant, dû à Vogan et Zuckerman découle alors de [36].

**Théorème 1.1** *Soit  $\pi$  un  $(\mathfrak{g}, K)$ -module unitaire cohomologique. Il existe une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$  de  $\mathfrak{g}$  tel que  $\pi \cong A_{\mathfrak{q}}$ . On peut de plus choisir  $\mathfrak{q}$  de manière à ce que le groupe  $L$  n'ait pas de facteurs simples compacts (non abélien); dans ce cas  $\mathfrak{q}$  est uniquement déterminé à conjugaison par  $K$  près.*

Nous supposons dorénavant que l'algèbre  $\mathfrak{q}$  associée à une représentation  $\pi$  comme dans le Théorème 1.1 est choisie de manière à ce que le groupe  $L$  n'ait pas de facteurs simples compacts (non abélien).

Nous allons maintenant déduire du Théorème 1.1, le théorème suivant qui est un cas particulier d'un théorème [33, Theorem A.10] de Vogan. Notons  $\widehat{G}$  le dual unitaire de  $G$ , d'après un théorème classique d'Harish-Chandra, celui-ci s'identifie à l'ensemble des classes d'équivalences de  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules unitaires irréductibles, nous le munissons de sa topologie de Fell. Notons enfin  $\Pi$  (resp.  $\Pi(\mathfrak{l})$ ) l'ensemble des racines simples de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{g}$  (resp.  $\mathfrak{l}$ ).

**Théorème 1.2** *Soit  $\pi$  comme dans le Théorème 1.1. La représentation  $\pi$  est isolée dans le dual unitaire de  $G$  si et seulement si le couple  $(G, \mathfrak{q})$  a les propriétés suivantes.*

1. *Le groupe  $L$  n'a aucun facteur simple localement isomorphe à  $SO(n, 1)$  ou  $SU(n, 1)$  ( $n \geq 1$ ).*
2. *Il n'y a pas de racine imaginaire non compacte dans  $\Pi$  orthogonale à  $\Pi(\mathfrak{l})$ .*

*Démonstration.* Nous commençons par démontrer que les conditions 1. et 2. sont suffisantes. Nous montrons en fait la contraposée. Supposons donc que la représentation  $\pi$  n'est pas isolée dans le dual unitaire de  $G$  : soit  $\{\pi_j\}$  une suite de représentations irréductibles unitaires différentes de  $\pi$  qui converge vers  $\pi$ .

Le plus bas  $K$ -type de  $\pi$  est un  $K$ -type des représentations  $\pi_j$  (sauf peut-être un nombre fini d'entre elles). Notons alors  $\mu = \mu(\mathfrak{q})$  le plus bas  $K$ -type de  $\pi$ ,  $R = R(\mathfrak{q}) = \dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$  et supposons dorénavant que  $\mu$  intervient comme  $K$ -type dans chaque  $\pi_j$ . Le  $K$ -type  $\mu$  intervient avec multiplicité 1 dans  $\pi$  et  $\bigwedge^R \mathfrak{p}$ , et

$$H^*(\mathfrak{g}, K, \pi) \cong \text{Hom}_K(\bigwedge^* \mathfrak{p}, \pi) \cong \text{Hom}_{L \cap K}(\bigwedge^{*-R}(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}), \mathbb{C}).$$

Fixons un entier  $j$  et considérons le complexe

$$\dots \rightarrow C^*(\pi_j) := \text{Hom}_K(\bigwedge^* \mathfrak{p}, \pi_j) \xrightarrow{d} C^{*+1}(\pi_j) \rightarrow \dots$$

Rappelons que si  $f \in C^q(\pi_j)$ , la différentielle  $df$  de  $f$  est l'élément de  $C^{q+1}(\pi_j) = \text{Hom}_K(\bigwedge^{q+1} \mathfrak{p}, \pi_j)$  donné par

$$df(x_0, \dots, x_q) = \sum_i (-1)^i x_i \cdot f(x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_q).$$

Puisque  $\mu \subset \bigwedge^R \mathfrak{p}$ , le produit scalaire sur  $\bigwedge^* \mathfrak{p}$  induit par la forme de Killing de  $G$  permet d'identifier canoniquement  $\text{Hom}_K(\mu, \pi_j)$  à un sous-espace de  $C^R(\pi_j) = \text{Hom}_K(\bigwedge^R \mathfrak{p}, \pi_j)$ . De la même manière l'inclusion  $\mathfrak{p} \wedge \mu \subset \bigwedge^{R+1} \mathfrak{p}$  induit une inclusion  $\text{Hom}_K(\mathfrak{p} \wedge \mu, \pi_j) \subset C^{R+1}(\pi_j)$ . Et, si  $f$  est un élément non nul de  $\text{Hom}_K(\mu, \pi_j)$ , par définition de la différentielle  $d$ , l'élément  $df \in C^{R+1}(\pi_j)$  appartient en fait au sous-espace  $\text{Hom}_K(\mathfrak{p} \wedge \mu, \pi_j)$ .

Nous distinguons alors deux cas suivant que l'image  $d(\text{Hom}_K(\mu, \pi_j))$  soit triviale ou non à partir d'un certain rang  $j \geq j_0$ .

Commençons par supposer que l'image  $d(\text{Hom}_K(\mu, \pi_j))$  est non triviale pour une infinité de  $j$ . Quitte à extraire on peut alors supposer  $d(\text{Hom}_K(\mu, \pi_j)) \neq 0$  pour tout  $j$ . Comme représentation de  $K$ , le module  $\mathfrak{p} \wedge \mu$  se décompose en un nombre fini de sous-espaces irréductibles. Quitte à extraire une sous-suite de  $(\pi_j)$ , on peut donc supposer qu'il existe un  $K$ -type  $\nu \subset \mathfrak{p} \wedge \mu$  qui intervient dans chaque  $\pi_j$ . Pour conclure dans ce cas rappelons la célèbre inégalité de Dirac de Parthasarathy (cf. [25, (2.26)], [9, II.6.11], [36, Lemma 4.2]).

**Lemme 1.3** *Soit  $(\pi, V_\pi)$  une représentation unitaire irréductible de  $G$  et  $V_\pi^K$  son  $(\mathfrak{g}, K)$ -module associé. Fixons une représentation de  $\mathfrak{k}$  de plus haut poids  $\chi \in \mathfrak{t}^*$  et apparaissant dans  $V_\pi^K$ ; et un sous-système positif de racines  $\Delta^+(\mathfrak{g})$  de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{g}$ . Notons  $\rho$  (resp.  $\rho_c, \rho_n$ ) dans  $\mathfrak{t}^*$  la demi-somme des racines dans  $\Delta^+(\mathfrak{g})$  (resp.  $\Delta^+(\mathfrak{k}), \Delta^+(\mathfrak{p})$ ), de sorte que  $\rho = \rho_c + \rho_n$ . Soit  $w$  un élément du groupe de Weyl  $W_K = W(\mathfrak{k}, \mathfrak{t})$  de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{k}$ , tel que  $w(\chi - \rho_n)$  soit dominant pour  $\Delta^+(\mathfrak{k})$ . Alors,*

$$-\pi(\Omega) \geq \|\rho\|^2 - \|w(\chi - \rho_n) + \rho_c\|^2,$$

où  $\Omega$  désigne le casimir de  $\mathfrak{g}$  et la norme  $\|\cdot\|$  est déduite de la forme de Killing sur  $\mathfrak{g}$ .

Puisque  $\pi(\Omega) = 0$  ( $\pi$  est cohomologique et donc de caractère infinitésimal égal à celui de la représentation triviale), la suite  $\pi_j(\Omega)$  tend vers 0 lorsque  $j$  tend vers  $+\infty$ . Le Lemme 1.3 appliqué à chacune des représentations  $\pi_j$  et au  $K$ -type  $\nu$  implique que le plus haut poids  $\chi$  de  $\nu$  vérifie l'inégalité

$$\|\rho\|^2 - \|w(\chi - \rho_n) + \rho_c\|^2 \leq 0. \quad (1.5)$$

Par ailleurs Kumaresan montre dans [21] qu'un  $K$ -type de  $\bigwedge^* \mathfrak{p}$  vérifiant l'inégalité (1.6) est nécessairement de la forme  $\mu(\mathfrak{q}')$  pour un certaine sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q}' \subset \mathfrak{g}$ . Le  $K$ -type  $\nu \subset \mathfrak{p} \wedge \mu(\subset \bigwedge^{R+1} \mathfrak{p})$  est donc égal à un certain  $\mu(\mathfrak{q}')$ , où  $\mathfrak{q}'$  est une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable de  $\mathfrak{g}$ .

**Lemme 1.4** *Soient  $\mathfrak{q} = \mathfrak{u} + \mathfrak{l}$  et  $\mathfrak{q}' = \mathfrak{u}' + \mathfrak{l}'$  deux sous-algèbres paraboliques  $\theta$ -stable de  $\mathfrak{g}$  telles que  $L$  et  $L'$  n'aient pas de facteurs simples compacts. Supposons que le  $K$ -type  $\mu(\mathfrak{q}')$  intervienne dans  $\mathfrak{p} \wedge \mu(\mathfrak{q})$ . On est alors dans l'une des trois situations suivantes.*

1. *Le groupe  $L$  a un centre non compact et  $L' = L$ .*
2. *Le groupe  $L$  a un facteur simple localement isomorphe à  $SO(n, 1)$  ( $n \geq 2$ ) ou à  $SU(n, 1)$  ( $n \geq 1$ ) et le groupe  $L'$  est obtenu à partir de  $L$  en remplaçant ce facteur par  $SO(n-2, 1) \times SO(2)$  ou  $S(U(n-1, 1) \times U(1))$  respectivement.*
3. *Le groupe  $L'$  a un facteur simple localement isomorphe à  $SO(n, 1)$  ( $n \geq 2$ ) ou à  $SU(n, 1)$  ( $n \geq 1$ ) et  $L$  est obtenu à partir de  $L'$  en remplaçant ce facteur par  $SO(n-2, 1) \times SO(2)$  ou  $S(U(n-1, 1) \times U(1))$  respectivement.*

*Démonstration du Lemme 1.4.* Le  $K$ -type  $\mu(\mathfrak{q}') \subset \mathfrak{p} \wedge \mu(\mathfrak{q})$  intervient dans le produit tensoriel  $\mathfrak{p} \otimes \mu(\mathfrak{q})$  son plus haut poids est donc de la forme  $2\rho(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) + \delta$ , où  $\delta$  est (un poids de la représentation de  $K$  dans  $\mathfrak{p}$ , c'est-à-dire) ou bien nulle ou bien une racine de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{p}$ . On a en fait seulement trois possibilités :

1. ou bien  $\delta$  est nulle;
2. ou bien  $\delta$  est une racine de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}$ ;

3. ou bien  $-\delta$  est une racine de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$ .

Nous allons montrer que ces trois cas correspondent aux différentes situations prédites par le Lemme 1.4.

Commençons par supposer que  $\delta = 0$ . Alors (cf. [36, Corollary 3.7]),

$$\mathrm{Hom}_{L \cap K}(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Hom}_K(\bigwedge^{R+1} \mathfrak{p}, \mu(\mathfrak{q})) \neq 0,$$

et le groupe  $L$  a un centre non compact. Remarquons finalement que dans ce cas  $\mu(\mathfrak{q}') = \mu(\mathfrak{q})$  et donc que  $L = L'$ . Nous sommes donc dans le premier cas prédit par le Lemme 1.4.

Supposons maintenant que  $\delta$  est une racine de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}$ . Soit  $V$  l'espace de dimension 1 :  $\bigwedge^R(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$ . D'après [36, Lemme 3.4], un vecteur de poids  $2\rho(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) + \alpha$  dans  $\bigwedge^{R+1} \mathfrak{p}$ , avec  $\alpha$  un poids de  $\bigwedge^* \mathfrak{p}$  intervient nécessairement dans  $V \otimes \bigwedge^*(\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p})$ . Le vecteur de plus haut poids  $\bigwedge^{R+1}(\mathfrak{u}' \cap \mathfrak{p})$  de  $\mu(\mathfrak{q}')$  est donc nécessairement de la forme

$$\bigwedge^R(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}) \otimes v$$

où  $v$  est un vecteur de poids  $\delta$  dans  $\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p}$ . L'algèbre  $\mathfrak{u}$  est donc contenue dans  $\mathfrak{u}'$  et l'intersection  $\mathfrak{q}'' = \mathfrak{q}' \cap \mathfrak{l}$  définit une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable de  $\mathfrak{l}$  telle que

1. l'algèbre  $\mathfrak{u}'' \cap (\mathfrak{l} \cap \mathfrak{p})$  soit de dimension un, et
2. le groupe  $L' = L''$ .

La première condition est très restrictive, elle implique que le groupe  $L$  a un facteur simple localement isomorphe à  $SO(n, 1)$  ( $n \geq 2$ ) ou à  $SU(n, 1)$  ( $n \geq 1$ ). La seconde condition implique quant à elle que le groupe  $L'$  est obtenu à partir de  $L$  en remplaçant ce facteur par  $SO(n-2, 1) \times SO(2)$  ou  $S(U(n-1, 1) \times U(1))$  respectivement. Nous sommes donc dans le deuxième cas prédit par le Lemme 1.4.

Supposons finalement que  $-\delta$  est une racine de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$ . Alors  $\mu(\mathfrak{q}) = 2\rho(\mathfrak{u}' \cap \mathfrak{p}) + \alpha$  où  $\alpha$  est une racine de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{l}' \cap \mathfrak{p}$ . Nous sommes donc ramené au cas précédent d'où l'on déduit que le groupe  $L'$  a un facteur simple localement isomorphe à  $SO(n, 1)$  ( $n \geq 2$ ) ou à  $SU(n, 1)$  ( $n \geq 1$ ) et que le groupe  $L$  est obtenu à partir de  $L'$  en remplaçant ce facteur par  $SO(n-2, 1) \times SO(2)$  ou  $S(U(n-1, 1) \times U(1))$  respectivement. Nous sommes donc dans le troisième cas prédit par le Lemme 1.4.

Concluons maintenant la démonstration de l'implication inverse dans le Théorème 1.2 toujours sous l'hypothèse que les images  $d(\mathrm{Hom}_K(\mu, \pi_j))$  sont non triviales.

On sait alors qu'il existe un  $K$ -type  $\nu \subset \mathfrak{p} \wedge \mu(\subset \bigwedge^{R+1} \mathfrak{p})$  égal à un certain  $\mu(\mathfrak{q}')$ , où  $\mathfrak{q}'$  est une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable de  $\mathfrak{g}$ . Le Lemme 1.4 s'applique donc et on a trois possibilités. Si  $L$  a un centre non compact,  $L$  admet un facteur simple localement isomorphe au groupe  $SO(1, 1)$  ce qui contredit le premier point du Théorème 1.2. Si  $L$  a un facteur simple localement isomorphe à  $SO(n, 1)$  ( $n \geq 2$ ) ou à  $SU(n, 1)$  ( $n \geq 1$ ), c'est évidemment encore en contradiction avec le premier point du Théorème 1.2. Si enfin il existe un groupe  $L'$  ayant un facteur simple localement isomorphe à  $SO(n, 1)$  ( $n \geq 2$ ) ou à  $SU(n, 1)$  ( $n \geq 1$ ) et tel que le groupe  $L$  soit obtenu à partir de  $L'$  en remplaçant ce

facteur par  $SO(n-2, 1) \times SO(2)$  ou  $S(U(n-1, 1) \times U(1))$  respectivement, c'est évidemment en contradiction avec le premier point du Théorème 1.2 si  $n \geq 3$  dans le cas  $SO$  et  $n \geq 2$  dans le cas  $SU$ . Puisque  $SO(2, 1)$  et  $SU(1, 1)$  sont tous les deux localement isomorphes au groupe  $SL(2, \mathbb{R})$ , il nous reste la possibilité que  $L'$  admette un facteur simple localement isomorphe à  $SL(2, \mathbb{R})$  et que le groupe  $L$  soit obtenu à partir de  $L'$  en remplaçant ce facteur par son tore compact. Mais ce facteur de  $L'$  correspond à une racine imaginaire  $\beta \in \Pi$  orthogonale aux racines dans  $\Pi(\mathfrak{l})$  et le Théorème 1.2 est démontré.

Supposons maintenant que l'image  $d(\text{Hom}_K(\mu, \pi_j))$  soit triviale à partir d'un certain rang  $j \geq j_0$ . Supposons pour simplifier  $j_0 = 0$ .

On munit chaque chaîne  $C^*(\pi_j) \subset \bigwedge^* \mathfrak{p}^* \otimes \pi_j$  du produit scalaire obtenu en tensorisant le produit scalaire sur  $\pi_j$  avec le produit scalaire sur  $\bigwedge^* \mathfrak{p}^*$  défini par la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ . Notons alors  $\partial$  l'adjoint de l'opérateur  $d$  pour ce produit scalaire. Rappelons qu'il découle du Lemme de Kuga, cf. [9], que si  $\partial(\text{Hom}_K(\mu, \pi_j)) = 0$  alors (puisque  $d(\text{Hom}_K(\mu, \pi_j)) = 0$ ) le casimir  $\pi_j(\Omega) = 0$ . Mais dans ce cas et puisque  $\mu = \mu(\mathfrak{q})$  intervient dans  $\pi_j$ , il découle de [36, Theorem 1.4] que la représentation  $\pi_j$  est nécessairement égale à  $\pi$  contrairement à notre choix de  $\pi_j$ . Les images  $\partial(\text{Hom}_K(\mu, \pi_j))$  sont donc toutes non triviales.

De manière duale à notre premier cas et toujours quitte à extraire une sous-suite de  $(\pi_j)$ , on peut alors supposer qu'il existe un  $K$ -type  $\nu \subset \bigwedge^{R-1} \mathfrak{p}$  qui intervient dans chaque  $\pi_j$  et tel que  $\mu \subset \mathfrak{p} \wedge \nu$ . Le Lemme 1.3 appliqué à chacune des représentations  $\pi_j$  et au  $K$ -type  $\nu$  implique que le plus haut poids  $\chi$  de  $\nu$  vérifie l'égalité

$$\|\rho\|^2 - \|w(\chi - \rho_n) + \rho_c\|^2 = 0. \quad (1.6)$$

Ce qui, en utilisant là encore [21], montre que le  $K$ -type  $\nu \subset \bigwedge^{R-1} \mathfrak{p}$  est égal à un certain  $\mu(\mathfrak{q}')$ , où  $\mathfrak{q}'$  est une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable de  $\mathfrak{g}$ .

Le Lemme 1.4 s'applique donc à nouveau (en échangeant les rôles de  $\mathfrak{q}$  et  $\mathfrak{q}'$ ) et on a trois possibilités. Soit  $L = L'$  a un centre compact, soit  $L'$  a un facteur simple localement isomorphe à  $SO(n, 1)$  ( $n \geq 2$ ) ou à  $SU(n, 1)$  ( $n \geq 1$ ) et le groupe  $L$  est obtenu à partir de  $L'$  en remplaçant ce facteur par  $SO(n-2, 1) \times SO(2)$  ou  $S(U(n-1, 1) \times U(1))$  respectivement, soit le groupe  $L$  a un facteur simple localement isomorphe à  $SO(n, 1)$  ( $n \geq 2$ ) ou à  $SU(n, 1)$  ( $n \geq 1$ ). On retrouve donc les trois cas traités ci-dessus qui mènent aux trois même contradictions des hypothèses du Théorème 1.2. L'implication inverse est donc complètement démontrée.

Montrons maintenant l'implication directe. Remarquons d'abord que la démonstration de celle-ci par Vogan est très courte et immédiate une fois admises les propriétés de l'induction cohomologiques. Pour clarifier la suite du texte nous reprenons la démonstration de Vogan en termes d'induction parabolique. Commençons donc par quelques rappels sur l'induction parabolique. Soit  $H$  un sous-groupe de Cartan  $\theta$ -invariant dans  $G$ . Alors  $H = T^+A$  (produit direct) avec  $T^+ = H \cap K$  compact et  $A = \exp(\mathfrak{h}_0 \cap \mathfrak{p}_0)$ . Nous notons  $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$  l'ensemble des racines de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$ .

Soit  $\mathbb{M} = MA$  la décomposition de Langlands du centralisateur de  $A$  dans  $G$ . Le groupe  $M$  est un groupe linéaire réductif et  $T^+$  est un sous-groupe de Cartan compact de  $M$ . Rappelons qu'alors  $M$  possède une série discrète.



Plus précisément (cf. [19]), les représentations de la série discrète de  $M$  sont paramétrées par leur paramètre d'Harish-Chandra  $\lambda \in (\mathfrak{t}^+)^*$  associé à un (pseudo-)caractère régulier de  $T^+$  et regardé modulo l'action du groupe de Weyl  $W(G/T^+)$ . Nous notons  $\sigma(\lambda)$  la représentation correspondante.

Fixons  $\gamma = (\lambda, \nu) \in \mathfrak{h}^*$  avec  $\lambda$  comme au-dessus et  $\nu \in \widehat{A}$  (nous notons également  $\nu$  l'élément de  $\mathfrak{a}^*$  correspondant). On vérifie que  $\mathbb{M}$  est le sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique  $P = MAN$  tel que

$$\operatorname{Re}\langle \alpha, \nu \rangle \leq 0, \text{ pour toute racine } \alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a}).$$

La *représentation standard de paramètre*  $\gamma$  est le  $(\mathfrak{g}, K)$ -module

$$X(\gamma) = X^G(\gamma) = \operatorname{ind}_P^G(\sigma(\lambda) \otimes \nu \otimes 1).$$

(Ici nous utilisons l'induction normalisée et ne considérons que l'espace des vecteurs  $K$ -finis de la représentation induite.) Les différents constituants (sous-quotients) irréductibles de  $X(\gamma)$  ne dépendent pas de  $P$  mais seulement de  $\gamma$ . Speth et Vogan associent dans [30] une famille canonique  $\{\overline{X}^1(\gamma), \dots, \overline{X}^r(\gamma)\}$  de sous-quotients irréductibles de  $X(\gamma)$ , les *sous-quotients de Langlands*. Ce sont exactement les sous-quotients qui contiennent un  $K$ -type minimal de  $X(\gamma)$ , il sera ainsi plus commode de les paramétrer  $\overline{X}(\gamma, \mu)$  par les différents  $K$ -types minimaux  $\mu$  de  $X(\gamma)$ .

Cette construction est reliée aux représentations cohomologiques  $A_{\mathfrak{q}}$  de la manière suivante. Soit  $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$  une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable de  $\mathfrak{g}$ . Fixons  $H = T^+A$  un sous-groupe de Cartan  $\theta$ -stable et maximale déployé dans  $L$  et  $L = (L \cap K)AN^L$  une décomposition d'Iwasawa. Nous voulons lui associer une représentation standard et donc un paramètre  $\gamma = (\lambda, \nu)$ . On prend  $\nu \in \mathfrak{a}^*$  égal à la demi-somme des racines de  $\mathfrak{a}$  dans  $\mathfrak{n}^L$  et

$$\lambda = \rho^+ + \rho(\mathfrak{u}) \in (\mathfrak{t}^+)^*,$$

où un système positif de racines de  $\mathfrak{t}^+$  dans  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}$  étant fixé, nous notons  $\rho^+$  la demi-somme des racines positives de  $\mathfrak{t}^+$  dans  $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{l}$  et  $\rho(\mathfrak{u})$  la demi-somme des racines de  $\mathfrak{t}^+$  dans  $\mathfrak{u}$ . Alors, cf. [36], la représentation  $A_{\mathfrak{q}}$  s'identifie à l'**unique** “quotient de Langlands”  $\overline{X}(\gamma)$  de la représentation induite  $X(\gamma)$ .

Le lien avec le sous-groupe  $L$  est le suivant. Supposons que la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  soit contenue dans la sous-algèbre de Levi  $\mathfrak{l}$  d'une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$ . Alors, l'ensemble des constituants de  $X(\gamma)$  est en bijection avec l'ensemble des constituants de  $X^L(\gamma_L)$ , où  $\gamma_L = (\lambda_L, \nu)$  avec  $\lambda_L = \lambda - \rho(\mathfrak{u})$ . Si, plus précisément,  $\mu_L - 2\rho(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$  est un  $(K \cap L)$ -type minimal de  $X^L(\gamma_L)$ , il existe un unique  $K$ -type  $\mu$  tel que  $\mu_L$  soit la représentation de  $L \cap K$  engendrée par un espace de poids extrême dans  $\mu$ . La bijection associe alors à  $\overline{X}^L(\gamma_L, \mu_L - 2\rho(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}))$  le module  $\overline{X}^G(\gamma, \mu)$ . Remarquons que ce lien s'applique en particulier au cas des représentations cohomologiques. Dans ce cas  $X^L(\gamma_L)$  a encore un unique “quotient de Langlands”  $\overline{X}^L(\gamma_L)$  qui est la représentation triviale de  $L$ .

Revenons maintenant à la démonstration de l'implication directe dans le Théorème 1.2 et supposons d'abord que le groupe  $L$  possède un facteur simple localement isomorphe à  $SO(n, 1)$  ou  $SU(n, 1)$  ( $n \geq 1$ ). Alors la représentation triviale de  $L$  n'est **pas** isolée dans le dual unitaire  $\widehat{L}$  de  $L$  ( $L$  n'a pas la propriété (T))

de Kazhdan) : si  $L$  possède un facteur simple localement isomorphe à  $SO(1, 1)$  il suffit de considérer une suite de caractères unitaires convergeant vers le caractère trivial, sinon  $1_L$  est limite de représentations de la série complémentaire unitaire de  $SO(n, 1)$  ( $n \geq 2$ ) ou  $SU(n, 1)$  ( $n \geq 1$ ). Dans tous les cas la représentation triviale de  $L$  est approchée par des modules  $\overline{X}^L(\gamma_L^i, \mu_L^i)$  auxquels sont naturellement associés les modules  $\overline{X}(\gamma^i, \mu^i)$  qui sont unitaires d'après [34] et convergent vers la représentation cohomologique  $A_q$ .

Supposons enfin qu'il y ait une racine imaginaire non compacte  $\beta$  dans  $\Pi$  orthogonale à  $\Pi(\mathfrak{l})$ . Considérons alors la sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q}' = \mathfrak{l}' + \mathfrak{u}'$  correspondant à  $\Pi(\mathfrak{l}) \cup \{\beta\}$ . Le sous-groupe de Levi  $L'$  est localement isomorphe au produit  $L \times SL(2, \mathbb{R})$  au centre près. La correspondance ci-dessus associe à la représentation triviale  $\overline{X}^L(\gamma_L)$  de  $L$  une représentation  $\overline{X}^{L'}(\gamma_{L'})$  de  $L'$ , dont on peut facilement vérifier que c'est la première série discrète de  $SL(2, \mathbb{R})$  (tensorisée avec la représentation triviale de  $L$ ), à laquelle correspond, via la correspondance de  $L'$  à  $G$  et par fonctorialité de l'induction, la représentation cohomologique  $A_q$ . Mais la première série discrète de  $SL(2, \mathbb{R})$  est dans l'adhérence de la série complémentaire et comme au paragraphe précédent la correspondance de  $L'$  à  $G$  permet de construire une suite de modules unitaires qui convergent vers  $A_q$ . Ceci conclut la démonstration du Théorème 1.2.

**Remarques. 1.** Dans [33, Theorem A.10], Vogan énonce en fait quatre conditions nécessaires et suffisantes pour que la représentation  $\pi$  du Théorème 1.2 soit isolée. La condition 0) de Vogan est que le groupe  $L$  n'ait pas de facteurs simples compacts (non abélien), dans le cas des représentations cohomologiques auxquelles nous nous sommes restreint ici, nous avons rappelé (Théorème 1.1) que l'on pouvait toujours supposer cette condition vérifiée. La condition 1) de Vogan est que le centre de  $L$  ne soit pas compact, comme le remarque Vogan cette condition équivaut à ce que le groupe  $L$  n'ait pas de facteur localement isomorphe au groupe  $SO(1, 1)$ , elle est donc contenue dans notre condition 1. La condition 2) de Vogan correspond à notre condition 1. (avec  $n \geq 2$  dans le cas  $SO$ ). Enfin la condition 3) de Vogan peut paraître plus faible puisque dans notre cas celle-ci s'écrit :

$$\langle \beta^\vee, \rho_{\mathfrak{g}} \rangle \neq 1$$

*pour toute racine (imaginaire) non compacte  $\beta \in \Pi$  orthogonale à  $\Pi(\mathfrak{l})$ .*

Cette condition est en fait équivalente à notre condition 2. En effet, si  $\beta$  est une racine simple la transformation  $s_\beta$  permute les racines positives  $\neq \beta$  et envoie  $\beta$  sur  $-\beta$ . Elle envoie donc la demi-somme  $\rho_{\mathfrak{g}}$  de toutes les racines positives sur  $\rho_{\mathfrak{g}} - \beta$ . Puisque par ailleurs  $s_\beta(\alpha) = \alpha - 2\langle \beta^\vee, \alpha \rangle \beta$ , on obtient que pour toute racine  $\beta \in \Pi$ ,  $\langle \beta^\vee, \rho_{\mathfrak{g}} \rangle = 1$ .

**2.** Si dans le Théorème 1.2, la représentation  $\pi$  appartient à la série discrète de  $G$ , elle n'est pas isolée. En effet, l'algèbre  $\mathfrak{l}$  est alors compacte et donc abélienne et toute racine  $\beta \in \Pi$  est orthogonale à  $\Pi(\mathfrak{l})$ .

**3.** Dans la démonstration qu'il donne du Théorème 1.2, Vogan distingue deux cas suivant que le  $K$ -type  $\mu$  soit ou non un  $K$ -type minimal de toutes (sauf peut-être un nombre fini d'entre elles) les représentations  $\pi_j$ . La démonstration est plus simple lorsque  $\mu$  est effectivement un  $K$ -type minimal des représentations

$\pi_j$ . Et sous cette hypothèse la représentation  $\pi$  est isolée si et seulement si la condition 1. du Théorème 1.2 est vérifiée. Ceci correspond au fait que dans notre Lemme 1.4, pour que  $\mu(\mathfrak{q}')$  ne soit pas un plus bas  $K$ -type que  $\mu(\mathfrak{q})$ , l'on doit exclure le troisième cas.

4. Précisons la correspondance entre certains  $(\mathfrak{l}, L \cap K)$ -modules et  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules utilisée dans la démonstration de l'application directe du Théorème 1.2. Soit  $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$  une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable de  $\mathfrak{g}$ . Fixons une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{l}$ , et un poids  $\gamma_L \in \mathfrak{h}^*$ . Remarquons que

$$\rho(\mathfrak{u}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})} \alpha \in \mathfrak{h}^*.$$

Soit  $Y$  un  $(\mathfrak{l}, L \cap K)$ -module irréductible de caractère infinitésimal  $\gamma_{\mathfrak{l}} = \gamma - \rho(\mathfrak{u})$ . D'après Langlands [22] et Knapp-Zuckerman [18], il existe  $\lambda \in (\mathfrak{t}^+)^*$  associé à un (pseudo-)caractère régulier de  $T^+$  et  $\nu \in \hat{A}$  tels que  $\gamma = (\lambda, \nu) \in \mathfrak{h}^*$  et  $Y$  soit l'unique quotient de Langlands  $\overline{X}^L(\gamma_L)$  de  $X^L(\gamma_L)$ . Supposons de plus

$$\operatorname{Re}\langle \alpha, \gamma \rangle \geq 0, \text{ pour tout } \alpha \in \Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{h}), \quad (1.7)$$

et

$$\langle \alpha, \gamma \rangle \neq 0, \text{ pour tout } \alpha \in \Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{h}). \quad (1.8)$$

Alors le module  $\overline{X}(\gamma)$  est bien défini, on le note  $\mathcal{R}Y$ . C'est un  $(\mathfrak{g}, K)$ -module irréductible de caractère infinitésimal  $\gamma$  naturellement attaché à  $Y$ . Le foncteur  $\mathcal{R}$  est appelé *foncteur d'induction cohomologique*, il réalise une équivalence de catégorie exacte sur son image. Il envoie représentations unitaires sur représentations unitaires et représentations non-unitaires sur représentations non-unitaires, cf. [34].

5. La difficulté de la démonstration originale de Vogan tient à ce qu'une suite  $(\pi_j) \subset \hat{G}$  adhérente à  $\mathcal{R}1_L$  n'appartient pas nécessairement à l'image de  $\mathcal{R}$ . La démonstration de Vogan implique néanmoins qu'il existe alors  $L'$  lié à  $L$  comme dans le point 3. du Lemme 1.4 avec (en particulier  $L'$  possédant un facteur de rang 1 et donc)  $1_{L'}$  non-isolée :  $\rho_i \rightarrow 1_{L'}$  telle que la suite  $(\mathcal{R}'\rho_i)_i$  adhère à  $\mathcal{R}1_L$ . Où nous avons noté  $\mathcal{R}'$  le foncteur d'induction cohomologique de  $L'$  à  $G$ .

Dans [7] et [5] une propriété d'isolation faible joue un rôle important : l'isolation sous la condition  $d = 0$ . Nous dirons d'une représentation cohomologique  $\pi$  comme dans le Théorème 1.2 qu'elle est *isolée sous la condition  $d = 0$*  si elle est isolée de l'ensemble des représentations irréductibles unitaires telles que  $\operatorname{Im}(d_R) = 0$ , où  $d_R$  désigne la différentielle sur les cochaînes de degré  $R = R(\mathfrak{q})$  du complexe calculant la  $(\mathfrak{g}, K)$ -cohomologie.

Notre démonstration du Théorème 1.2 est bien adaptée pour caractériser les représentations cohomologiques isolées sous la condition  $d = 0$ . On obtient plus précisément.

**Proposition 1.5** *Soit  $\pi$  comme dans le Théorème 1.1. La représentation  $\pi$  est isolée sous la condition  $d = 0$  si et seulement s'il n'existe aucune sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q}' = \mathfrak{u}' + \mathfrak{v}'$  telle que le groupe  $L'$  ait un facteur simple localement isomorphe à  $SO(n, 1)$  ( $n \geq 2$ ) ou à  $SU(n, 1)$  ( $n \geq 1$ ) et que le groupe  $L$  s'obtienne à partir de  $L'$  en remplaçant ce facteur par  $SO(n - 2, 1) \times SO(2)$  ou  $S(U(n - 1, 1) \times U(1))$  respectivement.*

*Démonstration.* Montrons que c'est une condition suffisante par contraposée. Supposons donc qu'il existe une suite  $(\pi_j)$  comme dans la démonstration du Théorème 1.2 et vérifiant  $d(C^R(\pi_j)) = 0$ . Alors  $d(\text{Hom}_K(\mu, \pi_j)) = 0$  et la démonstration du Théorème 1.2 implique qu'il existe un  $K$ -type  $\mu' = \mu(\mathfrak{q}')$  associé à une certaine sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable de  $\mathfrak{g}$  tel que  $\mu' \subset \bigwedge^{R-1} \mathfrak{p}$  intervienne dans chaque  $\pi_j$  et tel que  $\mu \subset \mathfrak{p} \wedge \mu'$ . Le Lemme 1.4 s'applique en échangeant les rôles de  $\mathfrak{q}$  et  $\mathfrak{q}'$ . En outre, puisque  $\mu' \subset \bigwedge^{R-1} \mathfrak{p}$ , le plus haut poids  $2\rho(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$  de  $\mu$  est nécessairement de la forme  $2\rho(\mathfrak{u}' \cap \mathfrak{p}) + \delta$  avec  $\delta$  racine **positive**. On est donc dans le deuxième cas du Lemme 1.4 (en échangeant les rôles de  $L$  et  $L'$ ). Ce qui implique la Proposition 1.5.

## 2 Illustration dans le cas des groupes classiques

Dans cette section, nous appliquons le Théorème 1.2 et la Proposition 1.5 aux différents groupes classiques.

**Groupes unitaires.** Soient  $p$  et  $q$  des entiers strictement positifs avec  $p \leq q$  et

$$G = U(p, q) := \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : {}^t \bar{g} \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.1)$$

où  $A \in M_{p \times p}(\mathbb{C})$ ,  $B \in M_{p \times q}(\mathbb{C})$ ,  $C \in M_{q \times p}(\mathbb{C})$  et  $D \in M_{q \times q}(\mathbb{C})$ . Le rang réel de  $G$  est alors  $p$  et le sous-groupe

$$K = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in G : A \in U(p), D \in U(q) \right\}$$

est un sous-groupe compact maximal dans  $G$ .

Rappelons que la multiplication par  $i = \sqrt{-1}$  induit une décomposition

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-.$$

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est bien évidemment  $M_{(p+q) \times (p+q)}(\mathbb{C})$ , et l'on voit ses éléments sous forme de blocs comme dans (2.1). On a alors,

$$\mathfrak{p}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } B \in M_{p \times q}(\mathbb{C}) \right\}$$

et

$$\mathfrak{p}^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } C \in M_{q \times p}(\mathbb{C}) \right\}.$$

Soit  $E = \mathbb{C}^p$  (resp.  $F = \mathbb{C}^q$ ) la représentation standard de  $U(p)$  (resp.  $U(q)$ ). Alors, comme représentation de  $K_{\mathbb{C}}$ ,  $\mathfrak{p}^+ = E \otimes F^*$ .

Dans [6] nous avons paramétré les représentations cohomologiques de  $G$  par certains couple de partitions. Rappelons qu'une *partition* est une suite décroissante  $\lambda$  d'entiers naturels  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_l \geq 0$ . Les entiers  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  sont des *parts*. La *longueur*  $l(\lambda)$  désigne le nombre de parts non nulles, et le *poids*  $|\lambda|$ , la somme des parts. On se soucie peu, d'ordinaire, des parts nulles :

on se permet en particulier, le cas échéant, d'en rajouter ou d'en ôter. Le *diagramme de Young* de  $\lambda$ , que l'on notera également  $\lambda$ , s'obtient en superposant, de haut en bas, des lignes dont l'extrémité gauche est sur une même colonne, et de longueurs données par les parts de  $\lambda$ . Par symétrie diagonale, on obtient le diagramme de Young de la *partition conjuguée*, que l'on notera  $\lambda^*$ .

Soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions telles que le diagramme de  $\mu$  contienne  $\lambda$ , ce que nous noterons  $\lambda \subset \mu$ . Notons  $\mu/\lambda$  le complémentaire du diagramme de  $\lambda$  dans celui de  $\mu$  : c'est une *partition gauche* son diagramme est un *diagramme gauche*. Dans la pratique les partitions  $\lambda$  que nous rencontrerons seront incluses dans la *partition rectangulaire*  $p \times q = (\underbrace{q, \dots, q}_{p \text{ fois}}) = (q^p)$ , le diagramme gauche

$p \times q / \lambda$  est alors le diagramme de Young d'une partition auquel on a appliqué une rotation d'angle  $\pi$  ; nous noterons  $\hat{\lambda}$  cette partition, la *partition complémentaire* de  $\lambda$  dans  $p \times q$ .

Nous dirons d'un couple de partitions  $(\lambda, \mu)$  qu'il est *compatible* (*compatible dans*  $p \times q$  en cas d'ambiguïté) si

1. on a la suite d'inclusion  $\lambda \subset \mu \subset p \times q$ , et
2. le diagramme gauche  $\mu/\lambda$  est une réunion de diagrammes rectangulaires  $p_i \times q_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  ne s'intersectant qu'en des sommets.

Les résultats de Parthasarathy, Kumaresan et Vogan-Zuckerman mentionnés plus haut affirment alors que l'ensemble des classes d'équivalences de représentations cohomologiques de  $G$  est

$$\{A(\lambda, \mu) : (\lambda, \mu) \text{ est un couple compatible de partitions}\},$$

où

$$H^k(\mathfrak{g}, K, A(\lambda, \mu)) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } k = R := |\lambda| + |\hat{\mu}| = pq - \sum_{i=1}^m p_i q_i, \\ 0 & \text{si } k < R, \end{cases}$$

et plus généralement

$$H^k(\mathfrak{g}, K, A(\lambda, \mu)) \cong H^{k-R} \left( \prod_{i=1}^m U(p_i + q_i) / (U(p_i) \times U(q_i)), \mathbb{C} \right).$$

Ici  $U(p_i + q_i) / (U(p_i) \times U(q_i))$  est la grassmannienne des  $p_i$ -plans dans  $\mathbb{C}^{p_i+q_i}$ .

La représentation triviale correspond au couple  $(0, p \times q)$  et le degré  $R$  correspondant est évidemment égal à 0. On retrouve que la cohomologie qui lui correspond est la cohomologie du dual compact  $\hat{X}_G = U(p+q) / (U(p) \times U(q))$  de  $X_G$ . Les représentations cohomologiques appartenant à la série discrète sont celles qui vérifient  $\mu = \lambda$ . Enfin, remarquons que le "type de Hodge" de la classe de cohomologie fortement primitive de  $A(\lambda, \mu)$  est  $(R^+, R^-) = (|\lambda|, |\hat{\mu}|)$ . Nous noterons  $H^{\lambda, \mu}$  la  $A(\lambda, \mu)$ -composante de la cohomologie de degré  $R$  (composante fortement primitive).

Le Théorème 1.2 implique qu'un certain nombre de ces représentations sont isolées dans le dual unitaire de  $G$ . Il implique plus précisément le corollaire suivant.

**Corollaire 2.1** *Soit  $(\lambda, \mu)$  un couple compatible de partitions dans  $p \times q$  avec  $\mu/\lambda = (p_1 \times q_1) * \dots * (p_m \times q_m)$ . Alors la représentation  $A(\lambda, \mu)$  est isolée dans*

le dual unitaire de  $G$  si et seulement s'il n'existe aucun couple compatible de partitions  $(\lambda', \mu')$  dans  $p \times q$  tel que les diagrammes gauches  $\mu'/\lambda'$  et  $\mu/\lambda$  ne diffèrent que d'une case. Elle est isolée sous la condition  $d = 0$  si et seulement s'il n'existe aucun couple compatible de partitions  $(\lambda', \mu')$  dans  $p \times q$  tel que le diagramme gauche  $\mu/\lambda$  s'obtienne à partir de  $\mu'/\lambda'$  en lui enlevant une case.

On peut expliciter ces conditions : la représentation  $A(\lambda, \mu)$  est isolée dans le dual unitaire de  $G$  si et seulement si

1.  $\min_i(p_i, q_i) \geq 2$ , et
2. si  $\lambda_i = \mu_i > \lambda_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, p$ ) alors  $\mu_{i+1} = \mu_i$  (où nous adoptons exceptionnellement la convention que  $\lambda_{p+1} = \mu_{p+1} = -1$ ).

Le dernier point signifie que  $\lambda$  et  $\mu$  n'ont aucun angle  $\lrcorner$  ou  $\llcorner$  en commun. En particulier, les représentations  $A(\lambda, \mu)$  telles que  $\lambda = \mu$  (qui sont exactement les représentations cohomologiques de la série discrète) ne sont **jamais isolées**.

**Groupes orthogonaux.** Dans ce paragraphe  $G = O(p, q)^0$ , où  $p$  et  $q$  sont des entiers strictement positifs. Le rang réel de  $G$  est donc  $\min(p, q)$ . On a

$$G = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : {}^t g \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.2)$$

où  $A \in M_{p \times p}(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{p \times q}(\mathbb{R})$ ,  $C \in M_{q \times p}(\mathbb{R})$  et  $D \in M_{q \times q}(\mathbb{R})$ . Et,

$$K = \left\{ g = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \in G : A \in SO(p), D \in SO(q) \right\}.$$

L'involution de Cartan  $\theta$  est donnée par  $x \mapsto -{}^t x$ . On a alors,

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^t B & 0 \end{pmatrix} : B \in M_{p \times q}(\mathbb{C}) \right\}.$$

Soit  $E = \mathbb{C}^p$  (resp.  $F = \mathbb{C}^q$ ) la représentation standard de  $SO(p, \mathbb{C})$  (resp.  $SO(q, \mathbb{C})$ ). Alors, comme représentation de  $K_{\mathbb{C}}$ ,  $\mathfrak{p} = E \otimes F^*$ .

Dans [5], et toujours à partir des résultats de Parthasarathy, Kumaresan et Vogan-Zuckerman, nous montrons que l'ensemble des classes d'équivalences de représentations cohomologiques de  $G$  est alors

$$\{A(\lambda)_{\pm 2}^{\pm 1} : (\lambda, \hat{\lambda}) \text{ est un couple compatible de partitions}^1\},$$

où les signes  $\pm 1$  et  $\pm 2$  correspondent au fait que pour nous une classe d'équivalence de représentations cohomologiques correspond à une représentation du groupe connexe  $G$  et que certaines représentations  $A(\lambda)$  du groupe  $O(p, q)$  se restreignent au groupe  $G$  en une somme de 2 ou 4 représentations (cohomologiques) irréductibles. On peut oublier tout ceci dans le reste du texte.

Remarquons qu'une partition orthogonale  $\lambda$  vérifie que son diagramme gauche associé  $\hat{\lambda}/\lambda$  s'écrit comme une réunion de diagrammes rectangulaires :  $(a_1 \times b_1) * \dots * (a_m \times b_m) * (p_0 \times q_0) * (a_m \times b_m) * \dots * (a_1 \times b_1)$ . Les groupes de  $(\mathfrak{g}, K)$ -cohomologie de  $A(\lambda)_{\pm 2}^{\pm 1}$  se calculent alors de la manière suivante :

$$H^k(\mathfrak{g}, K, A(\lambda)_{\pm 2}^{\pm 1}) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } k = R := |\lambda|, \\ 0 & \text{si } k < R, \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Nous dirons dorénavant d'une partition  $\lambda$  telle que le couple  $(\lambda, \hat{\lambda})$  soit compatible, qu'elle est *orthogonale*.

et plus généralement

$$H^k(\mathfrak{g}, K, A(\lambda)_{\pm 2}^{\pm 1}) \cong H^{k-R}(O(p_0 + q_0)/(O(p_0) \times O(q_0)) \prod_{i=1}^m U(a_i + b_i)/(U(a_i) \times U(b_i)), \mathbb{C}).$$

Nous noterons  $H^\lambda$  la  $A(\lambda)$ -composante de la cohomologie de degré  $R$ .

Dans ce cas le Théorème 1.2 implique le corollaire suivant.

**Corollaire 2.2** *Soit  $\lambda \subset p \times q$  une partition orthogonale avec  $\hat{\lambda}/\lambda = (a_1 \times b_1) * \dots * (a_m \times b_m) * (p_0 \times q_0) * (a_m \times b_m) * \dots * (a_1 \times b_1)$ . Alors les différentes représentations  $A(\lambda)_{\pm 1}^{\pm 2}$  associ es à  $\lambda$  sont soit toutes isolées dans le dual unitaire de  $O(p, q)^0$  soit toutes non isolées. Elles sont isolées si et seulement s'il n'existe aucune partition orthogonale  $\lambda' \subset p \times q$  telle que les diagrammes gauches  $\hat{\lambda}/\lambda$  et  $\hat{\lambda}'/\lambda'$  ne diff rent que de deux cases. Elle est isolée sous la condition  $d = 0$  si et seulement s'il existe une partition orthogonale  $\lambda' \subset p \times q$  telle que le diagramme gauche  $\hat{\lambda}/\lambda$  s'obtienne à partir de  $\hat{\lambda}'/\lambda'$  en lui enlevant deux cases.*

**Groupes  $G = Sp(p, q)$ .** Ce cas est similaire à celui des groupes unitaires. Rappelons juste qu'en utilisant l'identification classique entre l'algèbre des quaternions  $\mathbb{H}$  et  $\mathbb{C}^2$ , on a :

$$\mathfrak{k}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 & S & 0 \\ 0 & B & 0 & T \\ -\overline{S} & 0 & \overline{A} & 0 \\ 0 & -\overline{T} & 0 & \overline{B} \end{pmatrix} : \begin{array}{l} A \in \mathfrak{u}(p), B \in \mathfrak{u}(q), \\ S \in \text{Sym}(p, \mathbb{C}), T \in \text{Sym}(q, \mathbb{C}) \end{array} \right\},$$

$$\mathfrak{p}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & M & 0 & X \\ {}^t\overline{M} & 0 & {}^tX & 0 \\ 0 & \overline{X} & 0 & -\overline{M} \\ {}^t\overline{X} & 0 & -{}^tM & 0 \end{pmatrix} : M, X \in M_{p \times q}(\mathbb{C}) \right\}.$$

Comme dans le cas unitaire [6] il n'est alors pas difficile de montrer que l'ensemble des représentations cohomologiques de  $G$  est

$$\left\{ A(\lambda, \mu)_i : \begin{array}{l} (\lambda, \mu) \text{ est un couple compatible de partitions et} \\ i = 0, 1 \text{ (toujours } = 1 \text{ si } \lambda_p > 0 \text{ ou } \mu_p = 0) \end{array} \right\},$$

où

$$H^k(\mathfrak{g}, K, A(\lambda, \mu)_1) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } k = R := pq + |\lambda| + |\hat{\mu}| = 2pq - \sum_{i=1}^m p_i q_i, \\ 0 & \text{si } k < R, \end{cases}$$

et

$$H^k(\mathfrak{g}, K, A(\lambda, \mu)_0) \cong \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } k = R := \begin{cases} pq - p_1 q_1 + |\lambda| + |\hat{\mu}| \\ 2pq - 2p_1 q_1 - \sum_{i=2}^m p_i q_i \end{cases} \\ 0 & \text{si } k < R, \end{cases}$$

et plus généralement

$$H^k(\mathfrak{g}, K, A(\lambda, \mu)_1) \cong H^{k-R} \left( \prod_{i=1}^m U(p_i + q_i)/(U(p_i) \times U(q_i)), \mathbb{C} \right),$$

et

$$\begin{aligned} & H^k(\mathfrak{g}, K, A(\lambda, \mu)_0) \\ & \cong H^{k-R}(Sp(p_1 + q_1)/(Sp(p_1) \times Sp(q_1)) \times \prod_{i=2}^m U(p_i + q_i)/(U(p_i) \times U(q_i)), \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Dans ce cas le Théorème 1.2 implique le corollaire suivant.

**Corollaire 2.3** *Soit  $(\lambda, \mu)$  un couple compatible de partitions dans  $p \times q$  avec  $\mu/\lambda = (p_1 \times q_1) * \dots * (p_m \times q_m)$ . Alors la représentation  $A(\lambda, \mu)_i$  ( $i = 0, 1$ ) est isolée dans le dual unitaire de  $G$  si et seulement si*

1. *lorsque  $i = 1$  : il n'existe aucun couple compatible de partitions  $(\lambda', \mu')$  dans  $p \times q$  tel que les diagrammes gauches  $\mu'/\lambda'$  et  $\mu/\lambda$  ne diffèrent que d'une case, et*
2. *lorsque  $i = 0$  :  $p_1, q_1 \geq 1$ ,  $p_1 + q_1 \geq 3$  et il n'existe aucun couple compatible de partitions  $(\lambda', \mu')$  dans  $p \times q$  tel que les diagrammes gauches  $\mu'/\lambda' = (p'_1 \times q'_1) * \dots * (p'_m \times q'_m)$  et  $\mu/\lambda$  ne diffèrent que d'une case et  $(p'_1, q'_1) = (p_1, q_1)$ .*

*Elle est isolée sous la condition  $d = 0$  si et seulement s'il n'existe aucun couple compatible de partitions  $(\lambda', \mu')$  dans  $p \times q$  tel que le diagramme gauche  $\mu/\lambda$  s'obtienne à partir de  $\mu'/\lambda'$  en lui enlevant une case et  $(p_1, q_1) = (p'_1, q'_1)$  si  $i = 0$ .*

### 3 Isolation automorphe

Considérons à nouveau un groupe  $G$  semi-simple algébrique sur  $\mathbb{Q}$ . Si l'on se restreint au dual automorphe il est naturel d'espérer des propriétés d'isolation plus fortes. Nous conjecturons le résultat suivant.

**Conjecture 3.1** *Soit  $\pi$  comme dans le Théorème 1.1. La représentation  $\pi$  est isolée dans*

$$\{\pi\} \cup \widehat{G}_{\text{Aut}}$$

*dès que le sous-groupe de Levi  $L \subset G$ , associé à la sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{q}$ , a un centre compact. C'est en particulier toujours le cas lorsque  $\text{rang}_{\mathbb{C}}(G) = \text{rang}_{\mathbb{C}}(K)$ , autrement dit lorsque  $G$  possède une série discrète.*

Nous conjecturons de plus que la Conjecture 3.1 est optimale au sens faible suivant : le type réel de  $G$  étant fixé, il devrait exister une  $\mathbb{Q}$ -forme de  $G$  telle que la représentation cohomologique  $\pi$  soit contenue et non-isolée dans  $\widehat{G}_{\text{Aut}}$ .

Enfin nous conjecturons qu'une représentation cohomologique  $\pi$  de  $G$  est toujours **isolée sous la condition**  $d = 0$  dans

$$\{\pi\} \cup \widehat{G}_{\text{Aut}}.$$

Dans la suite de cette section nous cherchons à motiver la Conjecture 3.1 à l'aide des Conjectures d'Arthur. Dans deux articles fondamentaux, Arthur a en effet donné une description conjecturale des représentations des groupes réductifs qui peuvent apparaître dans  $L^2(\Gamma \backslash G)$  pour un sous-groupe de congruence. Avec Clozel dans [7], nous avons déduit de la théorie d'Arthur **a minima** des limitations sévères sur les caractères infinitésimaux des représentations pouvant apparaître dans  $L^2(\Gamma \backslash G)$  lorsque  $G^{\text{nc}} = SU(n, 1)$  ou  $O(n, 1)^0$ . Commençons par rappeler cette théorie d'Arthur **a minima** et ce que celle-ci implique dans le cas des groupes de rang réel 1.



**Paramètres d'Arthur.** Dans ce paragraphe  $G$  est un groupe réductif réel et  ${}^L G$  le groupe dual de Langlands [22, 8]. Le *groupe de Weil* de  $\mathbb{R}$ , noté  $W_{\mathbb{R}}$ , est l'extension de  $\mathbb{C}^*$  par  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  (le groupe de Galois de  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{R}$ ) :

$$W_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^* \cup j\mathbb{C}^*,$$

où  $j^2 = -1$  et  $jcj^{-1} = \bar{c}$ . Un *paramètre d'Arthur pour  $G$*  est un homomorphisme

$$\psi : W_{\mathbb{R}} \times SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow {}^L G \quad (3.1)$$

tel que

1. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} W_{\mathbb{R}} & \rightarrow & {}^L G \\ & \searrow & \swarrow \\ & \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) & \end{array}$$

est commutatif.

2. Le morphisme  $\psi|_{SL(2, \mathbb{C})}$  est holomorphe ( $\equiv$  algébrique).
3. L'image de  $\psi|_{W_{\mathbb{R}}}$  est d'adhérence compacte.

On déduit de  $\psi$  un “paramètre de Langlands” (cf. [22, 8])

$$\begin{aligned} \varphi_{\psi} : W_{\mathbb{R}} &\rightarrow {}^L G \\ w &\mapsto \psi \left( w, \begin{pmatrix} |w|^{1/2} & 0 \\ 0 & |w|^{-1/2} \end{pmatrix} \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

où, pour  $w \in W_{\mathbb{R}}$ ,  $|w|$  est la valeur absolue de l'image de  $w$  dans  $\mathbb{R}^*$  via la suite exacte naturelle

$$1 \rightarrow U = \{z \in \mathbb{C}^* : |z| = 1\} \xrightarrow{u} \mathbb{R}^* \rightarrow 1$$

donnée par  $u : z \mapsto |z|_{\mathbb{C}} = z\bar{z}$  si  $z \in \mathbb{C}^*$  et  $u(j) = -1$ .

Il correspond aux paramètres d'Arthur des *paquets d'Arthur*, ensembles finis de représentations conjecturalement relié à la décomposition du spectre automorphe. Nous avons écrit “paramètre de Langlands” entre guillemets car le paramètre  $\varphi_{\psi}$  ne définit en général qu'une représentation de la forme intérieure quasi-déployée du groupe  $G$  (et non pas une représentation du groupe  $G$  lui même). La définition des paquets d'Arthur est donc un peu plus délicates lorsque  $G$  n'est pas quasi-déployé. Nous ne détaillons pas cet aspect des choses, préférant d'abord remarquer que puisque sur  $\mathbb{C}$  les algèbres de Lie de  $G$  et de n'importe laquelle de ses formes intérieures sont isomorphes, on peut en tout cas parler du *caractère infinitésimal* défini par  $\varphi_{\psi}$ . Énonçons alors la formulation très faible suivante des conjectures d'Arthur.

**Conjecture 3.2** *Si une représentation irréductible  $\pi$  de  $G$  apparaît (faiblement) dans  $L^2(\Gamma \backslash G)$  pour un sous-groupe de congruence, son caractère infinitésimal est associé à un paramètre d'Arthur  $\varphi_{\psi}$ .*

Dans [7] nous déduisons de la Conjecture 3.2 que lorsque  $G^{\text{nc}} = SU(n, 1)$  ou  $O(n, 1)^0$ , le groupe  $G$  doit vérifier l'hypothèse :

$$(\text{Hyp}) \quad : \quad \begin{cases} \text{Si } \pi = \overline{X}(\lambda, s) \in \widehat{G}_{\text{Aut}} \text{ est non tempérée, alors} \\ s \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \text{ (} 0 < s \leq \rho \text{).} \end{cases}$$

Ici, et comme au §1,  $\overline{X}(\lambda, s)$  désigne l'unique quotient de Langlands de la représentation induite  $X(\lambda, s)$  avec  $\lambda$  (pseudo-)caractère régulier associé à une représentation du sous-groupe de Levi d'un parabolique minimal  $P = MAN$  de  $G$  et  $s \in \mathbb{C}$  correspondant à un élément de  $\hat{A}$  via l'identification de  $1 \in \mathbb{C}$  avec l'unique racine simple de  $A$  dans  $G$ . Enfin et de manière usuelle,  $\rho = n$  si  $G^{\text{nc}} = SU(n, 1)$  et  $\rho = (n - 1)/2$  si  $G^{\text{nc}} = O(n, 1)^0$ .

Revenons maintenant sur la théorie d'Arthur dans le cas des représentations cohomologiques telle que décrite dans [3]. Commençons par décrire le foncteur d'induction cohomologique en termes de paramètres de Langlands. Considérons donc  $G$  un groupe semi-simple réel et  $L$  le sous-groupe de Levi associé à une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q}$ . Nous lui associons un plongement

$$\xi_L : {}^L L \rightarrow {}^L G.$$

La restriction de  $\xi_L$  au groupe dual de  $L$  est l'inclusion naturelle de celui-ci dans le groupe dual de  $G$ , alors que

$$\xi_L(z) = \left( \frac{z}{\bar{z}} \right)^{\rho(u)},$$

et

$$\xi_L(j) = n_G n_L^{-1} \rtimes j,$$

où  $n_G$  (resp.  $n_L$ ) est un élément fixé du groupe dérivée du groupe dual de  $G$  (reps.  $L$ ) qui envoie les racines positives sur les racines négatives. Il découle alors de [29, Proposition 1.3.5] que  $\xi_L$  est un  $L$ -plongement. Il n'est de plus pas difficile de vérifier que si  $\varphi : W_{\mathbb{R}} \rightarrow {}^L L$  est le paramètre de Langlands de la représentation  $Y = \overline{X}^L(\gamma_L)$  du point 4. de la remarque suivant le Théorème 1.2 et vérifiant (1.7) et (1.8), alors  $\xi_L \circ \varphi$  est le paramètre de Langlands de la représentation  $\mathcal{R}Y$ .

Le lien avec les paramètres d'Arthur est le suivant. Considérons le morphisme

$$\psi : W_{\mathbb{R}} \times SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow {}^L L$$

dont la restriction à  $W_{\mathbb{R}}$  est triviale et qui envoie l'élément

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sur l'élément unipotent principal dans le groupe dual de  $G$ . C'est un paramètre d'Arthur dont le paramètre de Langlands induit  $\varphi_{\psi}$  correspond à la représentation triviale de  $L$ . En composant le paramètre  $\psi$  par  $\xi_L$ , on obtient un paramètre d'Arthur du groupe  $G$ , il lui correspond un paquet d'Arthur contenant la représentation cohomologique correspondant à la sous-algèbre parabolique  $\mathfrak{q}$ .

Les conjectures d'Arthur reposent sur la construction de tels paquets, familles finies de représentations de  $G$  associées aux paramètres d'Arthur, qui devraient partitionner le dual automorphe de  $G$ . Arthur lui-même ne dit rien de la construction de ces paquets, sauf dans le cas des représentations cohomologiques, via la  $L$ -application  $\xi_L$  construite ci-dessus. En particulier, sa formulation ne précise pas quels paramètres de Langlands devraient apparaître dans la paquet associé à un paramètre d'Arthur donné, quand  $G$  n'est pas quasi-déployé sur  $\mathbb{R}$ .

Ces paramètres sont a priori construits par Adams, Barbasch et Vogan [1]. Mais la construction qui repose sur la géométrie algébrique, les singularités d'orbites et les faisceaux pervers est très difficile. Notre interprétation, plus modeste, des conjectures d'Arthur dans ce contexte implique la conjecture suivante. Toute erreur est évidemment notre.

**Conjecture 3.3** *Soit  $G$  un groupe semi-simple algébrique sur  $\mathbb{Q}$  et  $L$  le sous-groupe de Levi associé à une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q}$ . Fixons  $\tau$  une représentation unitaire de  $L$  et  $\pi$  la représentation de  $G$  déduite de  $\tau$  par la fonctorialité induite par la  $L$ -application  $\xi_L$ . La représentation  $\pi$  appartient au dual automorphe  $\widehat{G}_{\text{Aut}}$  de  $G$  si et seulement si (quitte à conjuguer  $L$  dans  $G$ ) l'inclusion  $L \subset G$  est définie sur  $\mathbb{Q}$  et la représentation  $\tau \in \widehat{L}_{\text{Aut}}$ .*

L'induction cohomologique devrait donc être fonctorielle entre les duals automorphes. Le lien avec la Conjecture 3.1 est le suivant. D'après la Remarque 5 du §1, il découle de la démonstration originale par Vogan [33] du Théorème 1.2 que pour démontrer la Conjecture 3.1 il suffit de vérifier que si  $\pi$  est comme dans le Théorème 1.2, que  $L$  a un centre compact et que  $\tau_i$  est une suite de représentations unitaires de  $L$  qui converge vers  $1_L$ , alors pour  $i$  suffisamment grand  $\mathcal{R}\tau_i$  n'appartient pas au dual automorphe de  $G$ . Puisque  $L$  a la propriété  $\tau$ , cf. Clozel [15], la Conjecture 3.3 implique finalement la Conjecture 3.1.

Plus modestement nous montrerons au §5 comment, dans de nombreux cas, la Conjecture 3.1 se ramène à vérifier l'hypothèse (Hyp), ou une approximation de celle-ci, pour chacun des groupes  $O(n, 1)^0$  ( $n \geq 2$ ) ou  $SU(n, 1)$  ( $n \geq 1$ ). Nous en déduirons de nouveaux cas de la Conjecture 3.1.

Avant cela et dans la section suivante, nous donnons d'autres raisons de croire à la Conjecture 3.3.

## 4 Applications cohomologiques

Considérons toujours  $G$  un groupe semi-simple algébrique sur  $\mathbb{Q}$ . Les applications cohomologiques que nous avons en vus sont des réponses partielles à la question classique suivante :

**Question 4.1** *Soit  $\pi \in \widehat{G}$  une représentation cohomologique. Existe-t-il un sous-groupe de congruence  $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$  tel que la représentation  $\pi$  intervienne discrètement dans  $L^2(\Gamma \backslash G)$  ?*

ou à la question plus faible :

**Question 4.2** *Soit  $\pi \in \widehat{G}$  une représentation cohomologique. Existe-t-il un réseau  $\Gamma$  dans  $G$  tel que la représentation  $\pi$  intervienne discrètement dans  $L^2(\Gamma \backslash G)$  ?*

Supposons  $G$  défini sur  $\mathbb{Q}$ . Notre stratégie, qui est déjà celle de Burger et Sarnak [11], pour montrer qu'une représentation cohomologique  $\pi$  intervient discrètement dans  $L^2(\Gamma \backslash G)$  pour un certain sous-groupe de congruence de  $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$  consiste 1) à démontrer que la représentation  $\pi$  appartient au dual automorphe  $\widehat{G}_{\text{Aut}}$ , et 2) à vérifier qu'elle y est isolée.

Commençons par remarquer que la Conjecture 3.3 implique que pour tout sous-groupe de Levi  $L \subset G$  défini sur  $\mathbb{Q}$  et associé à une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$ , la représentation cohomologique  $\mathcal{R}1_L \in \widehat{G}_{\text{Aut}}$ . En particulier et en utilisant la Conjecture 3.1, la Conjecture 3.3 implique :

**Conjecture 4.3** *Soit  $G$  un groupe semi-simple qui admet une série discrète. Alors la réponse à la Question 4.2 est toujours positive.*

La Question 4.1 est plus délicate. Un bon exemple est celui des groupes unitaires tordus étudiés par Clozel [14]. Afin de motiver la Conjecture 3.3, montrons comment déduire de celle-ci les principaux résultats de [14].

Fixons trois entiers  $n$ ,  $p$  et  $q$  tels que  $n = p + q$ ,  $1 \leq p \leq q$ . Si  $b$  est un diviseur de  $n$ , rappelons que Clozel pose

$$x = \left\lfloor \frac{p}{b} \right\rfloor \quad (4.1)$$

où  $[t]$  est la partie entière de  $t \geq 0$  ;

$$n = ab; \quad (4.2)$$

$$N = N(b) = bx^2 + (b - 2p)x + (a - 1)p. \quad (4.3)$$

Enfin, si  $N = N(b)$  est un tel entier, on note  $[pq - N, pq + N]_2$  l'ensemble des entiers  $\{pq - N, pq - N + 2, \dots, pq + N\}$  de même parité.

**Proposition 4.4** *Soient  $F$  un corps de nombres totalement réel,  $F_c$  une extension de  $F$  quadratique et totalement imaginaire (corps CM). Soit  $(D, *)$  une algèbre à division de degré  $n^2$  sur  $F_c$ , munie d'une involution de seconde espèce  $*$ . Soient  $U$  le groupe unitaire sur  $F$  associée à  $(D, *)$  et  $G = \text{Res}_{F/\mathbb{Q}}(U/F)$  - groupe  $\mathbb{Q}$ -algébrique. Supposons le groupe unitaire  $U$  compact en toutes les places infinies de  $F$  sauf une. On a alors  $G^{\text{nc}} = \text{SU}(p, q)$ , pour certains entiers  $p, q$  tels que  $p + q = n$ , et la Conjecture 3.3 implique :*

1. *Une représentation non triviale  $\pi \in \hat{G}_{\text{Aut}}$  ne peut intervenir dans la cohomologie qu'en les degrés appartenant à la réunion, sur l'ensemble des diviseurs  $b \neq 1$  de  $n$ , des intervalles*

$$[pq - N(b), pq + N(b)]_2.$$

2. *Pour chaque degré du point 1. il existe un sous-groupe de congruence  $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$  et une représentation  $\pi \subset L^2(\Gamma \backslash G)$  cohomologique en ce degré.*

*Démonstration.* Nous adoptons ici un style volontairement léger, notre but est en effet de motiver la Conjecture 3.3. Qu'il nous suffise donc de remarquer que les arguments de cohomologie galoisienne développés dans [15] montrent que la seule manière de plonger un groupe unitaire  $H$  comme Levi dans  $G$  est de considérer un diviseur  $b$  de  $n$ , une extension  $L_0$  de  $F$ , totalement réelle, de degré  $b$  et une algèbre à division  $A$  sur  $L = L_0 \otimes F_c$  de degré  $a = n/b$  et incluse dans  $D \otimes L_0$  telle que, munie de l'involution de seconde espèce (relativement à  $L/L_0$ ) induite par  $*$ , le groupe  $U(A, *)$  - un groupe sur  $L_0$  - se plonge dans  $U(D, *)$ . Le groupe  $H$  s'obtient alors par restriction des scalaires à partir du groupe  $U(A, *)$ . On vérifie aisément que  $H^{\text{nc}}$  est isomorphe à un groupe du type

$$\text{SU}(x_1, y_1) \times \dots \times \text{SU}(x_b, y_b), \quad (4.4)$$

avec  $x_i + y_i = a$  ( $i = 1, \dots, b$ ),  $x_1 + \dots + x_b = p$  et  $y_1 + \dots + y_b = q$ .

La Conjecture 3.3 implique que les seules représentations cohomologiques qui apparaissent dans le dual automorphe  $\widehat{G}_{\text{Aut}}$  sont obtenues par induction cohomologique de la représentation triviale d'un  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe  $L \subset G$ . Un tel sous-groupe est nécessairement de la forme (4.4) et la représentation cohomologique correspondante n'intervient que dans les degrés appartenant à l'intervalle

$$[pq - \sum_{i=1}^b x_i y_i, pq + \sum_{i=1}^b x_i y_i]_2.$$

Le premier point de la Proposition découle donc du petit lemme combinatoire suivant.

**Lemme 4.5** *Supposons que  $p + q = ab$  et fixons  $b$  entiers  $x_1, \dots, x_b$  (resp.  $y_1, \dots, y_b$ ) tels que*

- $x_1 + \dots + x_b = p$ ,  $y_1 + \dots + y_b = q$ , et
- pour tout  $i = 1, \dots, b$ ,  $x_i + y_i = a$ .

*Alors,*

$$\sum_{i=1}^b x_i y_i \leq (b - y)x(a - x) + y(x + 1)(a - x - 1),$$

*où  $p = bx + y$  avec  $0 \leq y < b$  et ces deux nombres ont la même parité. Autrement dit*

$$\sum_{i=1}^b x_i y_i \leq N(b),$$

*et ces deux nombres ont la même parité.*

*Démonstration.* Il s'agit en fait d'évaluer la somme

$$\sum_{i=1}^b x_i(a - x_i) \tag{4.5}$$

lorsque les  $x_i$  sont des entiers astreints à appartenir à l'intervalle  $[0, a]$  et à vérifier l'identité  $x_1 + \dots + x_b = p$ . Puisque  $(x-1)(a-x+1) = x(a-x) - a - 1 - 2x$ , il est immédiat, que sous ces conditions changer les  $x_i$  ne change pas la parité de l'expression (4.5). Il nous reste à majorer (4.5) : on montre par récurrence que l'expression (4.5) est maximale lorsque  $x_1 = \dots = x_{b-y} = x$  et  $x_{b-y+1} = \dots = x_b = x + 1$ . Il suffit de traiter le cas  $b = 2$  qui est bien sûr immédiat. Enfin il n'est pas difficile de vérifier que  $N(b) = (b - y)x(a - x) + y(x + 1)(a - x - 1)$ . Le Lemme 4.5 est démontré.

Il nous reste à expliquer pourquoi en admettant la Conjecture 3.3, les degrés du point 1. interviennent effectivement dans la cohomologie. Cela découle de ce que l'on peut effectivement construire comme indiqué ci-dessus (cf. là encore, les techniques de [15]) un  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe  $L \subset G$  tel que

$$L^{\text{nc}} = SU(x, a - x)^{b-y} \times SU(x + 1, a - x - 1)^y.$$

(Notations du Lemme 4.5.) La Conjecture 3.3 implique alors que la représentation  $\pi$  obtenue par induction cohomologique de  $L$  à  $G$  de la représentation triviale appartient au dual automorphe de  $G$  ( $L$  est bien le sous-groupe de Levi d'une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable de  $\mathfrak{g}$ ). Mais d'après la Conjecture 3.1 (qui

découle elle-même, rappelons-le, de la Conjecture 3.3), les représentations cohomologiques sont isolées dans  $\widehat{G}_{\text{Aut}}$ . La représentation  $\pi$  doit donc intervenir discrètement dans  $\widehat{G}_{\text{Aut}}$  et donc dans  $L^2(\Gamma \backslash G)$  pour un certain sous-groupe de congruence  $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ . Un petit calcul montre enfin que la représentation  $\pi$  intervient dans la cohomologie pour tous les degrés  $\in [pq - N(b), pq + N(b)]_2$ . La Proposition 4.4 est démontrée.

**Remarques. 1.** Sous l'hypothèse technique supplémentaire (notée (R) dans [14]) :

en chaque place  $v$  de  $F_c$ , l'algèbre  $D_v = D \otimes_{F_c} F_{c,v}$  est soit isomorphe à  $M_n(F_{c,v})$  soit une algèbre à division,

la conclusion de la Proposition 4.4 est un théorème de Clozel [14, Theorem 3.3].

**2.** Nous pourrions traiter de manière analogue tous les groupes unitaires, ceux-ci sont plus généralement obtenus à partir d'une algèbre centrale simple  $B = M_r(D)$ , avec  $D$  comme dans l'énoncé de la Proposition 4.4.

Dans un même registre, remarquons qu'il n'est pas difficile de vérifier, cf. [26], que si  $G$  est un groupe semi-simple algébrique sur  $\mathbb{Q}$  provenant (par restriction des scalaires) d'un groupe de type  ${}^3D_4$  ou  ${}^6D_4$  sur un corps de nombre totalement réel et tel que  $G^{\text{nc}} = O(7, 1)^0$ , alors  $G$  ne contient aucun  $\mathbb{Q}$ -sous-groupe  $L$  tel que  $L^{\text{nc}} = O(5, 1)^0$ . Et la Conjecture 3.3 implique la conjecture suivante.

**Conjecture 4.6** *Soit  $G$  un groupe semi-simple algébrique sur  $\mathbb{Q}$  provenant (par restriction des scalaires) d'un groupe de type  ${}^3D_4$  ou  ${}^6D_4$  sur un corps de nombre totalement réel et tel que  $G^{\text{nc}} = O(7, 1)^0$ , alors pour tout sous-groupe de congruence  $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ , on a :*

$$b_1(\Gamma) = 0.$$

Rappelons qu'une célèbre conjecture de Thurston affirme que toute variété hyperbolique compacte admet un revêtement fini avec un premier nombre de Betti non nul. Cette conjecture est vérifiée pour toute variété hyperbolique arithmétique de dimension  $\geq 4$  associée à un groupe  $G$ ,  $\neq {}^{3,6}D_4$ , en restant dans le monde des sous-groupes de congruence. Il est surprenant de noter que selon la Conjecture 4.6, ce ne devrait plus être le cas pour les groupes de type  ${}^{3,6}D_4$ .

À défaut de savoir démontrer la Conjecture 3.3, on peut utiliser les functorialités remarquables découvertes par Burger, Li et Sarnak dans [10] et [11] :

1. Si  $H \subset G$  sont deux  $\mathbb{Q}$ -groupes semi-simples et si  $\rho \in \widehat{H}_{\text{Aut}}$  alors toute représentation dans le support de l'induite  $\text{ind}_H^G \rho$  appartient au dual automorphe  $\widehat{G}_{\text{Aut}}$ .
2. Si  $H \subset G$  sont deux  $\mathbb{Q}$ -groupes semi-simples et si  $\pi \in \widehat{G}_{\text{Aut}}$  alors toute représentation dans le support de la restriction  $\pi|_H$  appartient au dual automorphe  $\widehat{H}_{\text{Aut}}$ .

Commençons par exploiter la première functorialité en prenant pour  $\rho$  la représentation triviale  $1_H$  de  $H$ . Alors  $\text{ind}_H^G \rho = \text{ind}_H^G 1_H = L^2(H \backslash G)$ . Toute représentation de la série discrète de  $H \backslash G$  (i.e. toute représentation intervenant discrètement dans la représentation  $L^2(H \backslash G)$ ) appartient au dual automorphe

$\widehat{G}_{\text{Aut}}$ . Comme le remarquent Burger, Li et Sarnak, une représentation cohomologique  $\pi$  **isolée** de  $G$  intervenant dans la série discrète de  $H \backslash G$  pour un certain sous-groupe  $H$  comme ci-dessus intervient alors dans la cohomologie ( $L^2$ ) de  $S(\Gamma)$  pour un certain sous-groupe de congruence  $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ . Nous montrons en fait la proposition suivante.

**Proposition 4.7** *Soit  $\pi$  une représentation cohomologique de  $G$  appartenant à la série discrète de  $H \backslash G$ . Supposons de plus  $\pi$  **isolée sous la condition**  $d = 0$  dans  $\widehat{G}_{\text{Aut}}$ . Il existe alors un sous-groupe de congruence  $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$  tel que la représentation  $\pi$  intervienne discrètement dans  $L^2(\Gamma \backslash G)$ .*

*Démonstration.* Notons  $R$  le degré fortement primitif de la représentation cohomologique  $\pi$ . L'espace  $\text{Hom}_K(\bigwedge^R \mathfrak{p}, \pi)$  est de dimension 1, notons  $\omega$  un générateur. L'élément  $\omega \in \text{Hom}_K(\bigwedge^R \mathfrak{p}, C^\infty(H \backslash G))$  et définit donc une forme différentielle lisse sur  $X_G$ ,  $H$ -invariante à gauche. La représentation  $\pi$  étant cohomologique, cette forme différentielle est de plus harmonique. Elle s'identifie naturellement à une composante isotypique de la forme de Thom  $\Omega$  (à une forme exacte lisse près) du fibré normal de  $X_H$  dans  $X_G$ , cf. [31]. Or il existe (cela découle de la construction de la forme de Thom) une forme différentielle  $\alpha$  sur  $X_G$  lisse sauf peut-être le long de  $X_H$  et telle que  $\Omega = d(\alpha)$ . Puisque le fibré normal comme la forme  $\Omega$  sont  $H$ -invariants à gauche, on peut de plus supposer que la forme  $\alpha$  est  $H$ -invariante à gauche et la représenter par un élément

$$\alpha \in \text{Hom}_K(\bigwedge^{R-1} \mathfrak{p}, C^\infty(H \backslash G)).$$

Fixons maintenant  $d$  une distance  $G$ -invariante à gauche sur  $G$ . Notons

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

( $x \in \mathbb{R}$ ) et  $C = (\int \varphi)^{-1}$ . Considérons alors pour  $s > 0$ , la forme différentielle lisse à support compact :

$$\Omega_s = C s d [(\varphi(sx) * 1_{[0,s]}) (d(\cdot, H)) \cdot \alpha] \in \text{Hom}_K(\bigwedge^R \mathfrak{p}, C_0^\infty(H \backslash G)).$$

Les formes  $\Omega_s$  convergent uniformément sur les compacts vers la forme  $\Omega$  lorsque  $s$  tend vers  $+\infty$ .

Étant donné un sous-groupe de congruence  $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ , on peut toujours former la série

$$\Omega_s^\Gamma = \sum_{\gamma \in (\Gamma \cap H) \backslash \Gamma} \gamma^* \Omega_s,$$

qui définit une forme différentielle sur  $S(\Gamma)$ . Fixons  $\Gamma$  et notons  $\Lambda := \Gamma \cap H$ . Il est bien connu, cf. [7], qu'il existe une suite  $\Gamma_m$  de sous-groupes de congruence  $\subset \Gamma$  telle que

$$\Lambda = \cap_m \Gamma_m.$$

Les formes  $\Omega_s^{\Gamma_m}$  convergent donc sur tout compact de  $X_G$  vers la forme  $\Omega_s$ . La suite de formes différentielles **fermées**  $\Omega_m^{\Gamma_m}$  converge donc vers  $\Omega$ . Mais la représentation  $\pi$  (qui intervient dans  $\Omega$ ) est isolée sous la condition  $d = 0$  dans le dual automorphe de  $G$ , elle doit donc nécessairement intervenir dans  $\Omega_m^{\Gamma_m}$

pour  $m$  suffisamment grand et donc dans le spectre discret de  $\Gamma_m \backslash G$  pour  $m$  suffisamment grand. Ce qui conclut la démonstration de la Proposition 4.7.

De manière analogue on montre la proposition suivante dans [4].

**Proposition 4.8** *Soit  $\pi$  (resp.  $\sigma$ ) une représentation cohomologique de  $G$  (resp.  $H$ ) de degré fortement primitif  $R$ . Notons  $\mu$  et  $\delta$  leurs plus bas  $K$ -types respectifs. Supposons que*

1.  $\sigma$  (resp.  $\delta$ ) intervienne discrètement dans la restriction de  $\pi$  (resp.  $\mu$ ) à  $H$  (resp.  $K \cap H$ ),
2.  $\pi \in \widehat{G}_{\text{Aut}}$ , et
3.  $\sigma$  soit **isolée sous la condition**  $d = 0$  dans  $\widehat{H}_{\text{Aut}}$ .

*Alors il existe un sous-groupe de congruence  $\Lambda \subset H(\mathbb{Q})$  tel que la représentation  $\sigma$  intervienne discrètement dans  $L^2(\Lambda \backslash H)$ .*

Nous déduisons maintenant de ces Propositions et de la Proposition 1.5 des réponses partielles aux Questions 4.1 et 4.2. De la Proposition 4.7 nous déduisons d'abord le théorème général suivant.

**Théorème 4.9** *Soient  $G$  et  $H$  deux groupes semi-simples tels que  $H$  coïncide avec l'ensemble des points fixes d'une involution de  $G$  qui commute à l'involution de Cartan. Supposons :*

1. *qu'il existe une sous-algèbre de Cartan **compacte**  $\mathfrak{t}$  du supplémentaire de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$ <sup>2</sup>, et*
2. *qu'il n'existe aucune sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q}' = \mathfrak{u}' + \mathfrak{l}'$  telle que le groupe  $L'$  ait un facteur simple localement isomorphe à  $SO(n, 1)$  ( $n \geq 2$ ) ou à  $SU(n, 1)$  ( $n \geq 1$ ) et que le centralisateur  $L$  de  $\mathfrak{t}$  dans  $G$  s'obtienne en remplaçant ce facteur par  $SO(n - 2, 1) \times SO(2)$  ou  $S(U(n - 1, 1) \times U(1))$  respectivement.*

*Il existe alors un réseau cocompact  $\Gamma \subset G$  tel que*

$$H^{d_G - d_H}(S(\Gamma)) \neq 0,$$

*où  $d_G$  (resp.  $d_H$ ) désigne la dimension de l'espace symétrique associé à  $G$  (resp.  $H$ ). Il existe plus précisément un réseau cocompact  $\Gamma \subset G$  tel que la partie  $H^{d_G - d_H}(S(\Gamma))_{2(\rho - \rho_c)}$ , de la cohomologie, qui correspond au  $K$ -type  $2(\rho - \rho_c)$ , soit **non nulle**.*

*Démonstration.* Quitte à ajouter des facteurs compacts à  $G$  et  $H$ , nous pouvons les supposer algébriques sur  $\mathbb{Q}$ , avec  $G(\mathbb{Q})$  cocompact dans  $G(\mathbb{A})$ , et supposer le plongement  $H \subset G$  rationnel. Nous pouvons enfin supposer le groupe  $G^{\text{nc}}$  simple.

Notons  $\pi$  la représentation cohomologique de  $G$  de plus bas  $K$ -type  $2(\rho - \rho_c)$ , remarquons que son degré fortement primitif est égal à  $d_G - d_H$ . La représentation  $\pi$  intervient dans la série discrète de  $H \backslash G$  (cf. par exemple [5]) : elle est associée à une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$  dont la sous-algèbre de Levi  $\mathfrak{l}$  est égale au centralisateur de  $\mathfrak{t}$  dans  $\mathfrak{g}$ .

---

<sup>2</sup>Ce qui est équivalent au fait que  $H \backslash G$  possède une série discrète.



D'après la Proposition 1.5, l'hypothèse 2. du Théorème 4.9 implique que la représentation  $\pi$  est **isolée sous la condition**  $d = 0$  dans  $\tilde{G}$ . Le Théorème 4.9 découle donc de la Proposition 4.7.

Le Théorème 4.9 s'applique notamment aux couples de groupes suivants :  $(H, G) = (S(U(p, q-r) \times U(r)), SU(p, q))$ ,  $(S(O(p, q-r) \times O(r))^0, O(p, q)^0)$  ou  $(Sp(p, q-r) \times Sp(r), Sp(p, q))$ . Les hypothèses du Théorème 4.9 sont vérifiées dans les deux premiers cas dans [5], le dernier cas est similaire. Nous obtenons le corollaire suivant.

**Corollaire 4.10** 1. Soit  $G = SU(p, q)$  avec  $p \geq 2$ . Alors la réponse à la Question 4.2 est positive pour chacune des représentations  $A((r^p), ((q-r)^p))$ ,  $0 \leq r \leq q/2$ .

2. Soit  $G = O(p, q)^0$  avec  $p \geq 2$ . Alors la réponse à la Question 4.2 est positive pour chacune des représentations  $A((r^p))$ ,  $0 \leq r \leq q/2$ .

3. Soit  $G = Sp(p, q)$  avec  $p \geq 2$ . Alors la réponse à la Question 4.2 est positive pour chacune des représentations  $A((0), ((q-2r)^p))_0$ ,  $0 \leq r \leq q/2$ .

**Relèvement théta.** La méthode la plus puissante pour s'attaquer aux Questions 4.1 et 4.2 semble être la théorie du relevé théta. Rappelons brièvement comment celle-ci fonctionne. Soit  $k$  un corps de nombre totalement réel et soit  $(D, \mathfrak{i})$  une  $k$ -algèbre à involution de l'un des trois types suivants :

$$D = \begin{cases} k, & \text{cas 1,} \\ \text{une extension quadratique } F/k, & \text{cas 2,} \\ \text{une algèbre de quaternion de centre } k, & \text{cas 3,} \end{cases} \quad (4.6)$$

et

$$\mathfrak{i} = \begin{cases} id, & \text{cas 1,} \\ \text{l'involution de Galois de } F/k, & \text{cas 2,} \\ \text{l'involution standard,} & \text{cas 3.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Soient  $V$  et  $V'$  deux espaces vectoriels de dimension finie sur  $D$  équipés de deux formes sesquilineaires non-dégénérées  $(\cdot, \cdot)$  et  $(\cdot, \cdot)'$ , l'une  $\mathfrak{i}$ -hermitienne, l'autre  $\mathfrak{i}$ -anti-hermitienne. Le  $k$ -espace vectoriel  $W = V \otimes_D V'$  est alors naturellement muni d'une forme symplectique

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \text{tr}_{D/k}((\cdot, \cdot) \otimes (\cdot, \cdot)')^{\mathfrak{i}}$$

où  $\text{tr}_{D/k}$  désigne la trace usuelle de  $D$  sur  $k$ . Notons  $Sp(W)$ ,  $G$  et  $G'$  les groupes d'isométries respectifs de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $(\cdot, \cdot)$  et  $(\cdot, \cdot)'$ . Alors  $(G, G')$  est une paire réductive duale irréductible de type I dans  $Sp(W)$ . Supposons le groupe  $Sp(W)$  compact à toutes les places à l'infini de  $k$  sauf une et notons  $Sp$  le groupe réel (non compact) en cette place. Nous noterons également  $G$  et  $G'$  les sous-groupes réels de  $Sp$  correspondants. Notons enfin  $\tilde{Sp}$  le revêtement métaplectique à deux feuillets du groupe symplectique  $Sp$  et  $\tilde{G}$ ,  $\tilde{G}'$  les images inverses respectives de  $G$  et  $G'$  dans  $\tilde{Sp}$ . Comme dans l'introduction, et après restriction des scalaires de  $k$  à  $\mathbb{Q}$ , nous pouvons parler du dual automorphe de  $\tilde{Sp}$ . Traduits en ces termes, Howe montre, entre autres choses, dans [16], que la représentation de Weil (ou

représentation de l'oscillateur harmonique)  $\omega$  du groupe  $\widetilde{Sp}$  appartient au dual automorphe de  $\widetilde{Sp}$ . Considérons maintenant deux représentations respectives  $\pi$  et  $\pi'$  de  $G$  et  $G'$ . Les deux représentations  $\pi$  et  $\pi'$  sont dites duales pour la correspondance  $\theta$  locale, noté  $\pi' = \theta(\pi)$ , si la représentation  $\pi \otimes \pi'$  de  $\widetilde{G} \cdot \widetilde{G}'$  est équivalente à une sous-représentation irréductible de la restriction de  $\omega$  à  $\widetilde{G} \cdot \widetilde{G}'$ . Dans [23], Li montre que si  $\pi$  est une représentation de la série discrète de  $G$  "suffisamment régulière" (cf. [23]) et si  $\dim_D V \geq \dim_D V'$ , alors  $\pi'$  admet un relevé théta non nul à  $\widetilde{G}$ . La représentation correspondante  $\pi = \theta(\pi')$  est une représentation cohomologique explicitement décrite dans [23].

Dans [24] Li vérifie que dans un grand nombre de cas la correspondance est globale. Ce qui lui permet de démontrer le théorème suivant (le groupe  $G$  est toujours comme ci-dessus).

**Théorème 4.11** *1. Soit  $G = SU(p, q)$ . Alors la réponse à la Question 4.2 est positive pour chacune des représentations  $A(\lambda, \mu)$ , avec  $\mu/\lambda$  rectangle de périmètre  $> p + q$ .*  
*2. Soit  $G = O(p, q)^0$  avec  $p + q$  pair. Alors la réponse à la Question 4.1 est positive pour chacune des représentations  $A(\lambda)$ , avec  $\hat{\lambda}/\lambda$  rectangle de périmètre  $> p + q + 2$ .*  
*3. Soit  $G = O(p, q)^0$  avec  $p + q$  impair. Alors la réponse à la Question 4.1 est positive pour chacune des représentations  $A((r^p))$ , avec  $r < \frac{1}{4}(p + q - 2)$ .*  
*4. Soit  $G = Sp(p, q)$ . Alors la réponse à la Question 4.1 est positive pour chacune des représentations  $A(\lambda, \mu)_0$ , avec  $\mu/\lambda$  rectangle de périmètre  $\geq p + q$ .*

Dans le cas des espaces hermitiens et concernant la cohomologie **holomorphe** Anderson [2] répond positivement à la Question 4.2 en utilisant là encore la technique du relèvement théta. Remarquons que dans le Théorème 4.11 le cas du groupe unitaire est spécial puisque seule la Question 4.2 est résolue pour les représentations cohomologiques considérées. Ceci ne doit pas nous étonner, la réponse à la Question 4.1 est en effet négative, cf. Proposition 4.4 ou mieux [14].

Lorsque la représentation cohomologique est isolée dans le dual automorphe, on peut directement déduire de la correspondance locale la correspondance globale. Il découle en effet de la deuxième fonctorialité de Burger, Li et Sarnak que si la représentation  $\pi \otimes \pi'$  de  $\widetilde{G} \cdot \widetilde{G}'$  est équivalente à une sous-représentation irréductible de la restriction de la représentation  $\omega \in (\widetilde{Sp})_{\text{Aut}}$ , alors  $\pi \in \widehat{G}_{\text{Aut}}$  (et  $\pi' \in \widehat{G}'_{\text{Aut}}$ ). Si  $\pi$  est isolée dans  $\widehat{G}_{\text{Aut}}$ , elle doit donc intervenir discrètement dans un  $L^2(\Gamma \backslash G)$ , pour  $\Gamma$  sous-groupe de congruence de  $G$ . Le théorème et la conjecture qui suivent découlent donc des travaux [23] de Li et respectivement du Théorème 1.2 et de la Conjecture 3.1.

**Théorème 4.12** *Soit  $G$  comme au-dessus et soit  $\pi = A_{\mathfrak{q}}$  une représentation cohomologique de  $G$  telle que*

$$\mathfrak{l}_0 \cong \mathfrak{l}'_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

où

1.  $\mathfrak{l}'_0$  est une algèbre de Lie compacte ;

2.  $\mathfrak{g}_1$  est du “même type” que  $\mathfrak{g}_0$ , c’est-à-dire que  $\mathfrak{g}_1$  est isomorphe à l’algèbre de Lie du groupe des isométries de la restriction de  $(.,.)$  à un sous-espace non-dégénéré  $V_1$  de  $V$  ;
3.  $\mathfrak{g}_1$  est simple de rang réel  $\geq 2$  ; et
4. le groupe des isométries de la restriction de  $(.,.)$  à l’orthogonal de  $V_1$  est compact.

Il existe alors un sous-groupe de congruence  $\Gamma \subset G$  tel que la représentation  $\pi$  intervienne discrètement dans  $L^2(\Gamma \backslash G)$ .

**Conjecture 4.13** Soit  $G$  comme au-dessus et soit  $\pi = A_{\mathfrak{q}}$  une représentation cohomologique de  $G$  telle que

$$\mathfrak{l}_0 \cong \mathfrak{l}'_0 \oplus \mathfrak{g}_1$$

où  $\mathfrak{l}'_0$  est une algèbre de Lie compacte et  $\mathfrak{g}_1$  est non-abélienne du “même type” que  $\mathfrak{g}_0$ . Alors, il existe un sous-groupe de congruence  $\Gamma \subset G$  tel que la représentation  $\pi$  intervienne discrètement dans  $L^2(\Gamma \backslash G)$ .

La Conjecture 4.13 (qui est donc un corollaire de la Conjecture 3.1) contient comme cas particuliers le Corollaire 4.10 et le Théorème 4.11, à titre de comparaison avec ce dernier, explicitons le Théorème 4.12 dans le cas des groupes unitaires, orthogonaux et symplectiques.

**Corollaire 4.14** 1. Soit  $G = SU(p, q)$  avec  $p \geq 2$ . Alors la réponse à la Question 4.2 est positive pour chacune des représentations  $A((r^p), ((q - s)^p))$ , avec  $r, s$  entiers naturels tels que  $r + s \leq q - 2$ .

2. Soit  $G = O(p, q)^0$  avec  $p \geq 2$ . Alors la réponse à la Question 4.1 est positive pour chacune des représentations  $A((r^p))$ , avec  $r$  entier naturel tel que  $2r \leq \min(q - 2, p + q - 5)$ .

3. Soit  $G = Sp(p, q)$ . Alors la réponse à la Question 4.1 est positive pour chacune des représentations  $A((0), ((q - r)^p)_0)$ , avec  $r$  entier naturel tel que  $r \leq q$ .

Des restrictions simples sur la cohomologie des variétés localement symétriques découlent de la classification des représentations cohomologiques : il est en effet immédiat que si  $X$  est irréductible,

$$H^i(S(\Gamma)) = 0, \text{ pour tout } 0 < i < r_G, \quad (4.8)$$

où  $r_G$  est l’infimum des  $\dim(\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p})$  sur toutes les sous-algèbres paraboliques  $\theta$ -stable  $\mathfrak{q} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u}$  de  $\mathfrak{g}$ . On peut trouver une table des valeurs possibles de  $r_G$  dans [36, Table 8.2]. On a ainsi

$$r_G = \begin{cases} \min(p, q), & G = O(p, q)^0, SU(p, q) \\ 2 \min(p, q), & G = Sp(p, q). \end{cases}$$

En général retenons simplement que  $r_G$  est toujours inférieur au rang réel de  $G$ .

Rappelons que dans le cas hermitien l’existence d’une variété de Shimura  $S(\Gamma)$  avec  $H^{r_G}(S(\Gamma)) \neq 0$  est démontrée par Anderson [2]. Supposons  $p \leq q$  et considérons la restriction de  $SU(p, q)$  à  $O(p, q)^0$  (resp. de  $SU(2p, 2q)$  à  $Sp(p, q)$ ), il découle de [5] (resp. de la méthode de [5]) que l’unique représentation cohomologique du groupe  $SU(p, q)$  (resp.  $SU(2p, 2q)$ ) de bidegré  $(p, 0)$  (resp.  $(2p, 0)$ ) contient discrètement l’unique représentation cohomologique de degré

$p$  (resp.  $2p$ ) du groupe  $O(p, q)^0$  (resp.  $Sp(p, q)$ ), avec de plus une injection au niveau de la  $(\mathfrak{g}, K)$ -cohomologie. Le point 1. de la Proposition 4.8 est donc vérifié dans ces deux cas. Puisque par ailleurs la Proposition 1.5 implique que l'unique représentation cohomologique de degré  $p$  (resp.  $2p$ ) du groupe  $O(p, q)^0$  (resp.  $Sp(p, q)$ ) est isolée sous la condition  $d = 0$ . Le Théorème d'Anderson (dans le cas  $SU(p, q)$ ) et la Proposition 4.8 permettent de compléter légèrement un résultat de Li [24] et d'en donner une démonstration unifiée.

**Corollaire 4.15** *Soit  $G$  un groupe  $\mathbb{Q}$ -algébrique provenant (par restriction des scalaires) d'une algèbre à involution (de type I, II ou III) sur un corps de nombre et tel que  $G^{\text{nc}} = O(p, q)^0$  ou  $Sp(p, q)$ . Alors, il existe un sous-groupe de congruence  $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$  tel que*

$$H^{r_G}(S(\Gamma)) \neq 0.$$

L'analogue de ce résultat est faux pour le groupe  $U(p, q)$ , cf. Proposition 4.4 ou [14].

## 5 Restriction de représentations unitaires

Soit  $G$  un groupe semi-simple réel. Fixons  $K$  un sous-groupe compact maximal et  $P_\emptyset = M_\emptyset A_\emptyset N_\emptyset$  un sous-groupe parabolique minimal de  $G$ . Rappelons qu'un sous-groupe parabolique  $P = MAN \subset G$  est dit *standard* s'il contient  $P_\emptyset$  et qu'il est dit *cuspidal* si  $\text{rang}_{\mathbb{C}}(M) = \text{rang}_{\mathbb{C}}(K \cap M)$  (autrement dit si  $M$  possède une série discrète). Rappelons maintenant la paramétrisation de Langlands des représentations unitaires de  $G$ , cf. [19, Theorem 14.92]. (Nous adoptons ici pour les représentations induites et leurs quotients de Langlands des notations légèrement différentes de celles du §1.)

**Théorème 5.1** *Soit  $P = MAN$  un sous-groupe parabolique cuspidal standard de  $G$ , soit  $\sigma$  une série discrète de  $M$  ou une limite non dégénérée de séries discrètes de  $M$  et soit  $\nu \in \mathfrak{a}^*$  avec  $\text{Re}(\nu)$  dans la chambre de Weyl positive ouverte. La représentation induite  $\pi_{\sigma, \nu} = \text{ind}_P^G(\sigma \otimes \nu)$  admet alors un unique quotient irréductible  $J_{\sigma, \nu}$ . Toute représentation unitaire irréductible de  $G$  est soit tempérée, soit de la forme  $J_{\sigma, \nu}$  avec  $P$ ,  $\sigma$  et  $\nu$  comme ci-dessus.*

Dans cette section nous étudions la restriction des représentations unitaires  $J_{\sigma, \nu}$  à un sous-groupe  $H$  de  $G$  de **rang (réel) égal à 1**. Considérons donc  $H \subset G$  un sous-groupe semi-simple réel de rang réel égal à 1 et tel que  $K^H := H \cap K$  soit un sous-groupe compact maximal dans  $H$  (inclusion *standard*). Alors la restriction à  $H$  de l'involution de Cartan  $\theta$  de  $G$  est une involution de Cartan et nous pouvons fixer un sous-groupe parabolique minimal  $P^H = M^H A^H N^H$  de  $H$  tel que  $A^H = A_\emptyset \cap H$  et que la chambre de Weyl positive

$$\mathfrak{a}_0^{H,+} \subset \mathfrak{a}_{\emptyset,0}^+.$$

Le Théorème 5.1 s'applique évidemment à  $H$ , nous noterons  $J_{\delta, \nu}^H$  ( $\delta \in \widehat{M^H}$ ) les représentations correspondantes. Notons enfin  $\rho$  (resp.  $\rho^H$ ) la demi-somme des racines positives de  $\mathfrak{a}_\emptyset$  (resp.  $\mathfrak{a}^H$ ) dans  $\mathfrak{g}$  (resp.  $\mathfrak{h}$ ).

Le théorème principal de cette section est alors :

**Théorème 5.2** Soient  $P$ ,  $\sigma$  et  $\nu$  comme dans le Théorème 5.1 avec  $J_{\sigma,\nu}$  **unitaire**. Supposons que la restriction de la représentation  $J_{\sigma,\nu}$  au groupe  $H$  soit **non tempérée**. Il existe alors un  $M^H$ -type  $\delta$  contenu dans la restriction de  $\sigma$  à  $M^H$  tel que la représentation  $J_{\delta,(\nu-\rho)|_{\mathfrak{a}_H+\rho^H}}^H$  de  $H$  soit faiblement contenue dans la restriction de  $J_{\sigma,\nu}$  au groupe  $H$ . (Ici  $\nu$  est étendue à tout  $\mathfrak{a}_0$  de manière à être égal à 0 sur  $\mathfrak{a}_M$ .)

Avant de démontrer le Théorème 5.2, commençons par quelques rappels sur les fonctions radiales. Soit  $\pi$  une représentation irréductible unitaire de  $G$  et  $V$  le  $(\mathfrak{g}, K)$ -module associé. Notons  $I_\pi$  l'idéal du centre  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  de l'algèbre enveloppante défini par

$$I_\pi = \{Z \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) : \pi(Z) = 0 \text{ sur } V\}.$$

Rappelons (cf. [12]) que l'idéal  $I_\pi$  est cofini dans l'algèbre  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ .

Soient  $(\tau_i, V_{\tau_i})$ ,  $i = 1, 2$ , deux représentations irréductibles de  $K$  et  $E = \mathcal{L}(V_{\tau_2}, V_{\tau_1})$ . Notons  $\tau$  la représentation de  $K \times K$  sur  $E : \tau(k_1, k_2) \cdot L = \tau_1(k_1) \circ L \circ \tau_2(k_2^{-1})$ . On appelle *fonction  $\tau$ -radiale* toute fonction

$$F : G \rightarrow E$$

vérifiant la condition de double  $K$ -équivariance suivante :

$$F(k_1 g k_2) = \tau(k_1, k_2^{-1}) \cdot F(g) = \tau_1(k_1) F(g) \tau_2(k_2) \quad (5.1)$$

pour tous  $g \in G$  et  $k_1, k_2 \in K$ . Supposons maintenant que  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont deux  $K$ -types de la représentation  $\pi$  et notons

$$i_{\tau_2} : V_{\tau_2} \hookrightarrow V$$

l'inclusion et

$$p_{\tau_1} : V \rightarrow V_{\tau_1}$$

la projection. Alors, la fonction  $F : G \rightarrow E$  définie par

$$F(g) = p_{\tau_1} \circ \pi(g) \circ i_{\tau_2} \quad (5.2)$$

est  $\tau$ -radiale. Elle appartient en fait à  $\mathcal{A}(G, \tau_1, \tau_2, I_\pi)$ , l'ensemble des fonctions  $\Phi$  lisses et  $\tau$ -radiales telles que  $R(Z)\Phi = 0$ , pour tout  $Z \in I_\pi$ . (Avec  $R$  représentation régulière gauche dans l'espace des fonctions  $\tau$ -radiales.) Une telle fonction est toujours analytique.

Intéressons-nous maintenant à l'asymptotique d'une fonction  $\Phi \in \mathcal{A}(G, \tau_1, \tau_2, I_\pi)$ . D'après la décomposition de Cartan

$$G = K \overline{A^+} K$$

il suffit de comprendre  $\Phi(a)$  lorsque  $a$  tend vers l'infini dans  $\overline{A^+}$ . Remarquons que la restriction de  $\Phi$  à  $A^+$  prend ses valeurs dans

$$E^M := \{L \in E : L = \tau(m, m) \cdot L = \tau_1(m) L \tau_2(m)^{-1} \text{ pour tout } m \in M\},$$

où  $M$  désigne le centralisateur de  $A$  dans  $K$ .

Rappelons alors qu'il existe un ensemble fini  $X \subset \mathfrak{a}^*$  et un entier  $d \in \mathbb{N}$  tels que toute fonction  $\Phi \in \mathcal{A}(G, \tau_1, \tau_2, I_\pi)$  admet un développement en série absolument convergente de la forme

$$\Phi(a) = \sum_{\substack{\xi \in X - \mathbb{N}\Delta \\ |m| \leq d}} (\log a)^m a^\xi c_{\xi, m} \quad (a \in A^+) \quad (5.3)$$

avec des coefficients uniquement déterminés  $c_{\xi, m} \in E^M$ . (Ici  $\Delta$  désigne l'ensemble des racines simples de  $\mathfrak{a}$  dans  $\mathfrak{g}$ .) Un élément  $\xi \in X - \mathbb{N}\Delta$  tel qu'il existe un coefficient  $c_{\xi, m} \neq 0$  pour un certain entier  $m$  est appelé un *exposant* de  $\Phi$  (le long de  $A^+$ ), nous notons  $\mathcal{E}(\Phi)$  l'ensemble des exposants de  $\Phi$ . Le  $K \times K$ -type  $\tau$  étant fixé, on appelle  $\tau$ -*exposant* de  $\pi$  tout élément  $\xi \in \mathcal{E}(\Phi)$  pour une certaine fonction lisse  $\tau$ -radiale  $\Phi \in \mathcal{A}(G, \tau_1, \tau_2, I_\pi)$ . Un tel exposant  $\xi$  est dit *tempéré* si pour toute racine  $\alpha \in \Delta$ ,

$$\langle \operatorname{Re} \xi + \rho, \omega_\alpha \rangle \leq 0,$$

où  $\omega_\alpha \in \mathfrak{a}^*$  est le poids fondamental associé à  $\alpha$ , i.e.  $2\langle \omega_\alpha, \beta \rangle / \langle \beta, \beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ . La proposition suivante est bien connue, cf. [19, Proposition 8.61].

**Proposition 5.3** *Soit  $J_{\sigma, \nu}$  une représentation de  $G$  comme dans le Théorème 5.1. Il existe alors un exposant de  $J_{\sigma, \nu}$  de la forme  $\tilde{\nu} - \rho$  tel que  $\tilde{\nu}|_{\mathfrak{a}} = \nu$ .*

*Soient plus précisément  $\tau_1$  et  $\tau_2$  deux  $K$ -types contenant (en restriction à  $M \cap K$ ) un même  $(M \cap K)$ -type  $\mu$  de la représentation  $\sigma$ . Il existe alors une fonction  $\Phi \in \mathcal{A}(G, \tau_1, \tau_2, I_\pi)$  telle que*

1. *il existe un exposant  $\tilde{\nu} - \rho \in X$  (notations de (5.3)) tel que  $\tilde{\nu}|_{\mathfrak{a}} = \nu$ , et*
2. *il existe deux vecteurs  $v_i \in V_{\tau_i}$ ,  $i = 1, 2$ , engendrant sous l'action du groupe  $M \cap K$  le  $(M \cap K)$ -type  $\mu$  tels que  $\langle c_{\tilde{\nu}-\rho, 0}(v_2), v_1 \rangle \neq 0$ .*

Détaillons le cas d'un groupe  $H$  de rang 1. Fixons  $\tau_1^H$  et  $\tau_2^H$  deux  $K^H$ -types et considérons  $\delta$  une représentation irréductible de  $M^H$  apparaissant dans chaque  $(\tau_i^H)|_{K^H}$  ce que nous notons :  $\delta \in \widehat{M^H}(\tau^H)$  (nous notons toujours  $\tau^H = (\tau_1^H, \tau_2^H)$ ). Désignons par  $P_\delta^{\tau_1^H}$  le générateur de l'espace de dimension 1,  $\operatorname{Hom}_{K^H}(\pi_{\delta, \nu}^H, V_{\tau_1^H})$  et par  $J_\delta^{\tau_2^H}$  le générateur  $(= (P_\delta^{\tau_2^H})^*)$  de l'espace de dimension 1,  $\operatorname{Hom}_{K^H}(V_{\tau_2^H}, \pi_{\delta, \nu}^H)$ . Si  $\delta \in \widehat{M^H}(\tau^H)$  et  $\nu \in (\mathfrak{a}^H)^*$ , l'application

$$\Phi_{\delta, \nu}^{\tau_1^H, \tau_2^H} : g \mapsto P_\delta^{\tau_1^H} \circ \pi_{\delta, \nu}^H \circ J_\delta^{\tau_2^H}$$

définit une fonction lisse,  $\tau^H$ -radiale. En fait (cf. Wallach [37]),

$$\mathcal{A}(H, \tau_1^H, \tau_2^H, I_{\pi_{\delta, \nu}^H}) = \langle \Phi_{\delta, \nu}^{\tau_1^H, \tau_2^H} : \delta \in \widehat{M^H}(\tau^H) \rangle.$$

Puisque  $H$  est de rang 1, il n'y a qu'une seule racine simple  $\alpha$  de  $\mathfrak{a}^H$  dans  $\mathfrak{h}$ . Notons  $\omega = \omega_\alpha$ . Dans la suite nous identifions le dual  $(\mathfrak{a}^H)^*$  à  $\mathbb{C}$  via l'isomorphisme  $s \in \mathbb{C} \mapsto s\omega \in (\mathfrak{a}^H)^*$ . Rappelons alors le théorème classique suivant, cf. [37] ou [7] pour une démonstration.

**Théorème 5.4** *Fixons  $\tau^H = (\tau_1^H, \tau_2^H) \in K^H \times K^H$ . Alors, pour tout  $\delta \in \widehat{M^H}(\tau^H)$ , il existe un réel  $\kappa > 0$  tel que pour tout réel strictement positif  $\varepsilon$ , il*

existe une constante  $C_\varepsilon$  telle que pour tout élément  $\nu \in (\mathfrak{a}^H)^*$  vérifiant  $\rho^H > \operatorname{Re}(\nu) \geq \varepsilon$ , il existe des constantes  $c_{\tau_1^H}(\nu)$  et  $c_{\tau_2^H}(\nu)$  telles que :

$$\|\Phi_{\delta,\nu}^{\tau_1^H,\tau_2^H}(a) - c_{\tau_2^H}(\nu)a^{\nu-\rho^H}A_\delta - c_{\tau_1^H}(\nu)a^{-\rho^H-\overline{\nu}}\tau_1(k^*)A_\delta^{\tau_1^H,\tau_2^H}\tau_2(k^*)^{-1}\| \leq C_\varepsilon a^{-\rho^H-\kappa},$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme d'opérateur associée à des normes (quelconques) sur  $V_{\tau_1^H}$  et  $V_{\tau_2^H}$ ,  $A_\delta^{\tau_1^H,\tau_2^H} = P_\delta^{\tau_1^H} \circ J_\delta^{\tau_2^H} \in \operatorname{Hom}_{M^H}(V_{\tau_2^H}, V_{\tau_1^H})$ , et  $k^*$  est un élément de  $K^H$  centralisant  $A^H$  tel que  $k^*e^{tX}(k^*)^{-1} = e^{-tX}$ .

**Remarque.** Les constantes  $c_{\tau_1^H}(\nu)$  et  $c_{\tau_2^H}(\nu)$  sont explicites. Retenons simplement que l'on peut toutes deux les majorer en modules et uniformément par rapport au choix d'un  $\nu$  vérifiant  $\rho^H > \operatorname{Re}(\nu) \geq \varepsilon$ , par une constante strictement positive  $C(\varepsilon, \tau^H)$ .

Le Théorème 5.1 (et [19, Theorem 16.10]) implique(nt) que toute représentation **unitaire** irréductible **non tempérée** de  $H$  est de la forme  $J_{\delta,\nu}^H$  avec  $\delta \in \widehat{M^H}$  et  $\nu \in (\mathfrak{a}^H)^*$  **réel** et tel que  $\rho^H > \nu > 0$ . Il découle alors du Théorème 5.4 qu'une telle représentation admet un unique exposant non tempéré  $\nu - \rho^H \in (\mathfrak{a}^H)^*$ .

Le Théorème 5.4 permet de contrôler la croissance des coefficients des représentations irréductibles de  $H$ . Commençons par rappeler [19, Theorem 8.53] que si  $\rho$  est une représentation **tempérée** de  $H$  et  $v_2$  deux vecteurs  $K^H$ -finis appartenant respectivement à deux  $K^H$ -types  $\tau_1^H$  et  $\tau_2^H$ , on a :

$$|\langle \rho(a)v_1, v_2 \rangle| = O_{\tau^H} \left( \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot a^{-\rho^H} \right), \quad (5.4)$$

où les constantes implicites dans le  $O_{\tau^H}$  sont uniformes à  $\tau^H$  fixé.

Considérons maintenant le cas d'une représentation  $J_{\delta,\nu}^H$  comme ci-dessus. Soient  $v_1$  et  $v_2$  deux vecteurs  $K^H$ -finis appartenant respectivement à deux  $K^H$ -types  $\tau_1^H$  et  $\tau_2^H$ . Fixons un réel strictement positif  $\varepsilon$  tel que  $\operatorname{Re}(\nu) > \varepsilon$ . Alors :

$$\begin{aligned} \langle J_{\delta,\nu}^H(a)v_2, v_1 \rangle &= c_{\tau_2^H}(\nu) \langle P_\delta^{\tau_2^H} v_2, P_\delta^{\tau_1^H} v_1 \rangle_{V_\delta} \cdot a^{\nu-\rho^H} \\ &\quad + O_{\varepsilon,\tau^H} \left( \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot a^{-\rho^H} \right), \end{aligned} \quad (5.5)$$

où chaque  $P_\delta^{\tau_i^H}$  désigne la projection  $V_{\tau_i^H} \rightarrow V_\delta$  et où les constantes implicites dans le  $O_{\varepsilon,\tau^H}$  sont uniformes à  $\varepsilon$  et  $\tau^H$  fixés.

L'étape principale de la démonstration du Théorème 5.2 est la proposition suivante.

**Proposition 5.5** *Soit  $\tau$  un  $K$ -type d'une représentation  $J_{\sigma,\nu}$  comme dans le Théorème 5.1. Soit  $\xi \in \mathfrak{a}^*$  un  $(\tau, \tau)$ -exposant de  $J_{\sigma,\nu}$ . Alors,*

- *soit la restriction  $\xi|_{\mathfrak{a}^H}$  est tempérée comme élément de  $(\mathfrak{a}^H)^*$  ;*
- *soit il existe un  $M^H$ -type  $\delta$  apparaissant dans la restriction de  $\tau$  à  $M^H$  tel que la représentation  $J_{\delta,\nu'}^H$ , avec  $\nu' = \xi|_{\mathfrak{a}^H} + \rho^H \in (\mathfrak{a}^H)^*$ , soit faiblement contenue dans la restriction de  $J_{\sigma,\nu}$  à  $H$ .*

*Démonstration.* La restriction de la représentation  $\pi := J_{\sigma,\nu}$  au groupe  $H$  se décompose en une somme directe :

$$\pi|_H = \int_{\widehat{H}}^\oplus \rho d\mu(\rho), \quad (5.6)$$

où  $\mu$  est une mesure positive sur le dual unitaire  $\widehat{H}$  de  $H$ . Son support est par définition le support de la restriction de  $\pi$  à  $H$ . Fixons  $\xi \in \mathfrak{a}^*$  un  $(\tau, \tau)$ -exposant de  $\pi$  comme dans l'énoncé de la Proposition 5.5 et notons  $\xi'$  l'élément  $\xi|_{\mathfrak{a}^H} \in (\mathfrak{a}^H)^*$  que nous supposons non tempéré. Remarquons alors immédiatement que la démonstration de [19, Theorem 16.10] implique que  $\xi'$  est **réel**.

Nous déduirons facilement la Proposition 5.5 du lemme suivant.

**Lemme 5.6** *Il existe une représentation  $\rho$  de  $H$  appartenant au support de  $\mu$  et possédant deux  $K^H$ -types  $\tau_1^H$  et  $\tau_2^H \subset \tau|_{K^H}$  telle que  $\xi'$  soit un  $\tau^H$ -exposant de  $\rho$  (où  $\tau^H = (\tau_1^H, \tau_2^H)$ ).*

*Démonstration.* Afin de ne pas allourdir le texte nous notons dans la suite  $(P(\xi'))$  la conclusion du Lemme 5.6 relativement à un élément  $\xi' \in (\mathfrak{a}^H)^*$ .

Fixons deux vecteurs unitaires  $K$ -finis  $v_1$  et  $v_2$  appartenant à l'espace de la représentation  $\tau$  et tels qu'il existe une fonction  $\Phi \in \mathcal{A}(G, \tau, \tau, I_\pi)$  et un entier  $m$  tels que l'exposant  $\xi \in \mathcal{E}(\Phi)$  (notations de (5.3)) et le coefficient  $\langle c_{\xi, m} v_2, v_1 \rangle$  soit non nul. Remarquons que l'on peut toujours supposer  $v_1$  (resp.  $v_2$ ) appartenant à l'espace d'une représentation  $\tau_1^H$  (resp.  $\tau_2^H$ ) de  $K^H$  (apparaissant dans la restriction du  $K$ -type  $\tau$ ).

La décomposition (5.6) implique la décomposition suivante :

$$\langle \pi(a)v_2, v_1 \rangle = \int_{\widehat{H}} \langle \rho(a)v_{2, \rho}, v_{1, \rho} \rangle d\mu(\rho), \quad (5.7)$$

où  $v_i = \int_{\widehat{H}}^{\oplus} v_{i, \rho}$ ,  $i = 1, 2$  et  $a$  est un élément de  $A^H$ . Remarquons que dans la décomposition (5.7) on peut supposer que la mesure  $\mu$  ne charge que les représentations contenant les deux  $K^H$ -types  $\tau_1^H$  et  $\tau_2^H$ .

Le groupe  $H$  est de rang 1. Chaque représentation  $\rho$  dans (5.7) a au plus un exposant non tempéré  $\xi_\rho \in (\mathfrak{a}^H)^*$ .

**Lemme 5.7** *Soit  $\xi' \in (\mathfrak{a}^H)^*$  non tempéré tel que la propriété  $(P(\xi'))$  soit violée. Il existe alors un voisinage ouvert  $\Omega$  de  $\xi'$  dans  $(\mathfrak{a}^H)^*$  tel que la propriété  $(P(\alpha))$  soit violée pour tout  $\alpha \in \Omega$ .*

*Démonstration.* Nous montrons la contraposée. Supposons donc que pour tout voisinage ouvert  $\Omega$  de  $\xi'$  dans  $(\mathfrak{a}^H)^*$ , il existe un élément  $\alpha \in \Omega$  tel que la propriété  $(P(\alpha))$  soit vérifiée. Il existe alors une représentation  $\rho_\alpha$  de  $H$  appartenant au support de  $\mu$  et possédant deux  $K^H$ -types  $\tau_{\alpha, 1}^H$  et  $\tau_{\alpha, 2}^H \subset \tau|_{K^H}$  telle que  $\alpha$  soit un  $\tau_\alpha^H$ -exposant de  $\rho_\alpha$ .

Fixons  $\Omega_j$  une suite de voisinages ouverts de  $\xi'$  d'intersection réduite à  $\xi'$  et  $\alpha_j \in \Omega_j$  un élément non tempéré tel que  $(P(\alpha_j))$  soit vérifiée. D'après le Théorème 5.1, chaque représentation (non tempérée)  $\rho_j := \rho_{\alpha_j}$  est équivalente à un quotient de Langlands  $J_{\delta_j, \nu_j}^H$  avec  $\delta_j \in \widehat{M^H}$ ,  $\nu_j \in \mathfrak{a}_H^*$ ,  $\text{Re}(\nu_j) > 0$  et  $\alpha_j = \nu_j - \rho^H$ .

Nous allons démontrer qu'il existe une sous-suite de  $(\rho_j)$  qui converge dans  $\widehat{H}$  vers une représentation  $\rho$  possédant deux  $K^H$ -types  $\tau_1^H$  et  $\tau_2^H \subset \tau|_{K^H}$  telle que  $\xi'$  soit un  $\tau^H$ -exposant de  $\rho$ .

La restriction de  $\tau$  au compact  $K^H$  ne contient qu'un nombre fini de sous-représentations irréductibles. Quitte à extraire une sous-suite de  $(\rho_j)$ , nous pouvons donc supposer que tous les  $K^H \times K^H$ -types  $\tau_{\alpha_j}^H$  sont égaux à un certain  $K^H \times K^H$ -type  $\tau^H = (\tau_1^H, \tau_2^H)$ . Remarquons maintenant que puisque  $H$  est de



rang 1, le groupe  $M^H$  est compact. Puisque la représentation  $\rho_j$  possède  $\tau_1^H$  (resp.  $\tau_2^H$ ) comme  $K^H$ -type, le théorème de réciprocity de Frobenius implique que la représentation  $\delta_j$  est contenue dans la restriction de  $\tau_1^H$  (resp.  $\tau_2^H$ ) à  $M^H$ . Ces représentations ne contiennent, là encore, qu'un nombre fini de sous-représentations irréductibles. Quitte à extraire encore une fois, nous pouvons donc supposer tous les  $\delta_i$  égaux à une même représentation  $\delta \in \widehat{M^H}$ .

La suite des exposants  $\alpha_j = \nu_j - \rho^H \in (\mathfrak{a}^H)^*$  converge vers  $\xi'$  dans  $(\mathfrak{a}^H)^*$ , la suite  $(\nu_j)$  converge donc vers  $\nu = \rho^H + \xi'$ . Et la suite de représentations  $(\rho_j)$  converge dans  $\widehat{H}$  vers une représentation  $\rho$  (obtenue comme sous-quotient de l'induite  $\text{ind}_{P^H}^H(\delta \otimes \nu)$ ) contenant les  $K^H$ -types  $\tau_1^H$  et  $\tau_2^H$  et telle que  $\xi'$  soit un  $\tau^H$ -exposant de  $\rho$ .

Le support de  $\mu$  étant fermé dans  $\widehat{H}$ , la représentation  $\rho \in \text{support } \mu$  et la propriété  $(P(\xi'))$  est vérifiée. Ce qui conclut la démonstration (par contraposée) du Lemme 5.7.

Chacun des coefficients  $\langle \rho(a)v_{2,\rho}, v_{1,\rho} \rangle$  dans (5.7) est une fonction  $\tau^H$ -radiale du groupe  $H$  de rang 1. On peut donc leur appliquer les estimées (5.4) et (5.5) pour un certain réel strictement positif fixé  $\varepsilon < \xi' + \rho^H$  ( $\xi'$  est non tempéré). On a alors :

$$\begin{aligned} \langle \pi(a)v_2, v_1 \rangle &= \int_{\rho \in \widehat{H}, \xi_\rho + \rho^H > \varepsilon} c_{\tau_2}(\xi_\rho + \rho^H) \langle P_{\delta_\rho} v_{2,\rho}, P_{\delta_\rho} v_{1,\rho} \rangle a^{\xi_\rho} d\mu(\rho) \\ &\quad + O_{\varepsilon, v_1, v_2}(a^{-\rho^H}). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Chaque  $\xi_\rho$  est par ailleurs réel (chaque représentation  $\rho$  est unitaire non tempérée et  $H$  est de rang 1) et (Lemme 5.7) il existe un réel  $\eta > 0$  tel que  $\xi_\rho \notin ]\xi' - \eta, \xi' + \eta[$ . Il découle alors de (5.8) que

$$\langle \pi(a)v_2, v_1 \rangle = \frac{1}{O_{\varepsilon, v_1, v_2}(a^{-\xi' - \eta\omega})} + O_{\varepsilon, v_1, v_2}(a^{\xi' - \eta\omega}),$$

pour tout  $a \in A^{H,+}$ . Ce qui contredit le fait que  $\xi$  soit un exposant de  $\langle \pi(a)v_2, v_1 \rangle$  et conclut la démonstration du Lemme 5.6.

Démontrons maintenant la Proposition 5.5. Supposons la restriction  $\xi|_{\mathfrak{a}^H}$  non tempérée comme élément de  $(\mathfrak{a}^H)^*$ . D'après le Lemme 5.5, la restriction de la représentation  $\pi$  au sous-groupe  $H$  contient alors faiblement une représentation  $\rho$  possédant deux  $K^H$ -types  $\tau_1^H$  et  $\tau_2^H \subset \tau_{K^H}$  et telle que  $\xi'$  soit un  $\tau^H$ -exposant de  $\rho$ . La représentation est alors nécessairement de la forme  $J_{\delta, \nu}^H$  avec  $\delta \in \widehat{M^H}(\tau^H)$  et  $\nu' = \xi' + \rho^H$ . Et la Proposition 5.5 est démontrée.

Le Théorème 5.2 est une conséquence immédiate de la Proposition 5.3 et de la démonstration de la Proposition 5.5.

**Remarques. 1.** Testons la Proposition 5.5, dans le cas simple du groupe  $H = SL_2(\mathbb{R})$  plongé diagonalement dans  $G = SL_2(\mathbb{R}) \times SL_2(\mathbb{R})$ . Les représentations non tempérées appartiennent à la série complémentaire. Soient donc  $\pi_s$  et  $\pi_r$  ( $r, s \in ]0, 1[$ ) deux représentations de la série complémentaire. Le produit tensoriel  $\pi_s \otimes \pi_r$  est une représentation de  $G$ , elle admet une fonction radiale dont un coefficient dominant est égal à

$$\frac{s-1}{2}\varepsilon_1 + \frac{r-1}{2}\varepsilon_2.$$

En restriction au sous-groupe diagonal de  $H$ , celui-ci est égal à  $(r + s - 2)/2$ , il est tempéré si et seulement si  $r + s \leq 1$ . Dans le cas contraire  $r + s > 1$ , l'élément  $(r + s - 2)/2$  doit intervenir comme coefficient d'une représentation faiblement contenue dans la restriction à  $H$  du produit tensoriel  $\pi_s \otimes \pi_r$ . C'est effectivement le cas puisqu'alors un théorème classique de Repka [27] affirme que la représentation  $\pi_{r+s-1}$  intervient discrètement dans la restriction à  $H$  de la représentation  $\pi_s \otimes \pi_r$  de  $G$ .

**2.** La Proposition 5.5 implique immédiatement le principe énoncé dans la Remarque 4 après le Corollaire 1.3 de [11].

Soit  $G$  un groupe semi-simple réel et soit  $H \subset G$  un sous-groupe semi-simple réel (pas nécessairement de rang 1) tel que  $K^H := H \cap K$  soit un sous-groupe compact maximal dans  $H$  et toujours  $(\mathfrak{a}_0^H)^+ \subset \mathfrak{a}_0^+$ . Nous conjecturons alors la généralisation suivante de la Proposition 5.5.

**Conjecture 5.8** *Soient  $\pi \in \widehat{G}$ ,  $\tau$  un  $K$ -type de  $\pi$  et  $\xi$  un  $\tau$ -exposant de  $\pi$ . Il existe alors une représentation  $\sigma \in \widehat{H}$  faiblement contenue dans la restriction de  $\pi$  à  $H$ , un  $K^H$ -type  $\tau^H \subset \tau|_{K^H}$  de  $\sigma$  et un  $\tau^H$ -exposant  $\nu$  de  $\sigma$  tels que*

$$\operatorname{Re}(\nu) = \max \left( \operatorname{Re}(\xi)|_{\mathfrak{a}^H} - \rho|_{\mathfrak{a}^H} + \rho^H, 0 \right).$$

Cette Conjecture est peut-être accessible via la théorie de Mackey telle que développée par Venkatesh dans [32], lorsque  $H$  est un **sous-groupe de Levi** de  $G$  et  $\xi$  un exposant dominant. Tel que nous comprenons [32] le cas du groupe  $G = GL(n)$  (et  $H = \prod GL(a_i)$  Levi de  $G$ ), dont on connaît explicitement le dual unitaire, semble en découler.

Contentons-nous ici de remarquer que la Conjecture 5.8 est naturellement reliée à la combinatoire décrite par Clozel dans [13] (cf. aussi [32]). Comme dans [13] et [32], étudions le cas du groupe  $GL(n)$ . Celui-ci est particulièrement agréable car nous connaissons son dual unitaire [35] : soient  $m$  un entier  $= 1$  ou  $2$  et  $\delta$  une représentation de la série discrète de  $GL(m, \mathbb{R})$ . Pour tout entier naturel  $j$ , la représentation de  $GL(mj, \mathbb{R})$  induite de  $(\delta|\det|^{(j-1)/2} \otimes \delta|\det|^{(j-3)/2} \otimes \dots \otimes \delta|\det|^{(1-j)/2})$  admet un unique quotient irréductible :  $u(\delta, j)$ . Si  $0 < \alpha < 1/2$ , la représentation de  $GL(2mj, \mathbb{R})$  induite de  $u(\delta, j)|\det|^\alpha \otimes u(\delta, j)|\det|^{-\alpha}$  est unitarisable ; nous la notons  $u(\delta, j)[\alpha, -\alpha]$ .

Toute représentation unitaire de  $GL(n, \mathbb{R})$  est induite (unitaire) de représentations du type  $u(\delta, j)$  et  $u(\delta, j)[\alpha, -\alpha]$ , et cette expression est unique à permutation près. À une telle représentation unitaire  $\pi$  nous associons une matrice diagonale constituée des blocs

$$\begin{pmatrix} (j-1)/2 & & & \\ & (j-3)/2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (1-j)/2 \end{pmatrix}$$

pour chaque  $u(\delta, j)$  et répété  $m$  fois, et des deux blocs

$$\begin{pmatrix} (j-1)/2 \pm \alpha & & & \\ & (j-3)/2 \pm \alpha & & \\ & & \ddots & \\ & & & (1-j)/2 \pm \alpha \end{pmatrix}$$

pour chaque  $u(\delta, j)[\alpha, -\alpha]$  et répétés  $m$  fois. Nous notons  $T_\pi$  cette matrice réordonnée de telle manière que

$$T_\pi = \begin{pmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_n \end{pmatrix}, \quad T_1 \geq \dots \geq T_n.$$

Soit  $A \subset GL(n, \mathbb{R})$  le tore diagonal et soit

$$A_+ = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_n \end{pmatrix} \in H : x_1 \geq \dots \geq x_n \geq 0 \right\}.$$

Soit  $H = GL(m, \mathbb{R})$  plongé de manière standard dans  $G = GL(n, \mathbb{R})$  (de telle manière que  $A^{H,+} \subset A^+$ ). La Conjecture 5.8 implique alors que la restriction de  $\pi$  au groupe  $H$  contient faiblement une représentation  $\sigma$  telle que

$$T_\sigma = \langle T_\pi - \text{diag}(\frac{n-1}{2}, \dots, \frac{1-n}{2}) + \text{diag}(\frac{m-1}{2}, \dots, 0, \dots, 0, \dots, \frac{1-m}{2}) \rangle_m,$$

où la notation  $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$  signifie que nous ne gardons que les termes appartenant à  $GL(m)$  en remplaçant ceux d'entre eux qui sont négatifs par 0.

Nous retrouvons en particulier la combinatoire sur les  $SL(2)$ -types décrite dans [32].

Revenons maintenant à la Conjecture 3.1. Nous avons rappelé que la Conjecture 3.2 implique qu'un groupe  $L_0$  (localement isomorphe à)  $SO(n, 1)$  ( $n \geq 2$ ) ou  $SU(n, 1)$  ( $n \geq 1$ ) doit vérifier l'hypothèse

$$(\text{Hyp}) \quad : \quad \begin{cases} \text{Si } \pi = J_{\delta, s} \in (\widehat{L_0})_{\text{Aut}} \text{ est non tempérée, alors} \\ s \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \text{ (} 0 < s \leq \rho^{L_0} \text{).} \end{cases}$$

Cette hypothèse est naturellement approchée par les hypothèses :

$$(\text{Hyp}_\varepsilon) \quad : \quad \begin{cases} \text{Si } \pi = J_{\delta, s} \in (\widehat{L_0})_{\text{Aut}} \text{ est non tempérée, alors} \\ \text{soit } s \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \text{ (} 0 < s \leq \rho^{L_0} \text{); soit } 0 < s \leq \varepsilon, \end{cases}$$

avec  $\varepsilon > 0$ . Toute hypothèse  $(\text{Hyp}_\varepsilon)$  avec  $\varepsilon < \rho^{L_0}$  est non triviale.

Dans [7], avec Clozel, nous montrons l'hypothèse  $(\text{Hyp}_{\frac{1}{3}})$  pour le groupe  $SU(2, 1)$ .

Fixons maintenant  $\mathfrak{q}$  une sous-algèbre parabolique  $\theta$ -stable de  $\mathfrak{g}$  et  $L \subset G$  le sous-groupe de Levi associé. Selon la Conjecture 3.3, la représentation  $A_{\mathfrak{q}}$  ne devrait apparaître dans le dual automorphe  $\widehat{G}_{\text{Aut}}$  que si (quitte à conjuguer  $L$  dans  $G$ )  $L$  est un sous-groupe rationnel de  $G$ . Nous le supposons par la suite. Supposons enfin que  $L$  possède un facteur simple non compact  $L_0$ , localement isomorphe à  $SO(n, 1)$  ( $n \geq 2$ ) ou  $SU(n, 1)$  ( $n \geq 1$ ). La représentation  $\pi := A_{\mathfrak{q}}$  est alors non-isolée dans le dual unitaire  $\widehat{G}$  de  $G$ . Le Théorème 5.2 (ou plutôt la Proposition 5.5) permet néanmoins de montrer :

**Théorème 5.9** *Supposons que le groupe  $L_0$  vérifie l'hypothèse  $(\text{Hyp}_\varepsilon)$ . Alors, la représentation  $\pi$  est isolée dans*

$$\{\pi\} \cup \widehat{G}_{\text{Aut}}$$

dès que  $2\rho^{L_0} - \rho|_{\mathfrak{a}^{L_0}} > \varepsilon$ .

*Démonstration.* Nous montrons la contraposée. Supposons donc  $2\rho^{L_0} - \rho|_{\mathfrak{a}^{L_0}} > \varepsilon$  et qu'il existe une suite  $(\pi_i)$  de représentations dans  $\widehat{G}_{\text{Aut}}$  qui converge vers  $\pi$ , avec  $\pi_i \not\cong \pi$ . Il découle de la description des représentations cohomologiques faite au §1 que  $\pi$  s'obtient comme quotient de Langlands d'une induite unitaire à partir d'un sous-groupe parabolique cuspidal  $P = MAN$ , où  $A$  est un sous-groupe de Cartan maximale déployé dans  $L$ , et  $\pi = J_{\sigma, \rho^L}$ . La Proposition 5.3 implique alors que la représentation  $\pi$  admet un exposant dont la restriction à  $\mathfrak{a}^{L_0}$  est égale à  $\rho^{L_0} - \rho|_{\mathfrak{a}^{L_0}} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  et  $> \varepsilon$ . Pour  $i$  suffisamment grand, la représentation  $\pi_i$  admet donc un exposant dont la restriction à  $\mathfrak{a}^{L_0}$  est  $> \varepsilon - \rho^{L_0}$  et  $\notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ . Et la Proposition 5.5 implique que le support de la restriction de  $\pi_i$  au groupe  $L_0$  contient une représentation de la forme  $J_{\delta, s}$  avec  $s > \varepsilon$  et  $s \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ . Mais puisque le sous-groupe  $L_0$  est rationnel, la fonctorialité de la restriction (Burger et Sarnak, cf. §4) implique que le support de la restriction de  $\pi_i$  au groupe  $L_0$  est contenu dans  $(\widehat{L_0})_{\text{Aut}}$ , ce qui contredit l'hypothèse  $(\text{Hyp}_\varepsilon)$  et conclut la démonstration du Théorème 5.9.

Admettons temporairement qu'un groupe du type  $SU(n, 1)$  vérifie toujours l'hypothèse  $(\text{Hyp})$ . Le Théorème 5.9 s'applique alors aux représentations  $A((a^p), ((a+1)^p))$ ,  $0 \leq a \leq q-1$ , du groupe  $SU(p, q)$  lorsque  $p \geq q$ . Néanmoins le Théorème 5.2 n'est pas employé ici de manière optimale : il n'y a *a priori* aucune raison de restreindre  $A_q$  au groupe  $L_0$ , nous pourrions tout aussi bien restreindre la représentation cohomologique à un sous-groupe rationnel  $H$  de rang 1 différent de  $L_0$ . En choisissant  $H = SU(1, q)$ , on peut ainsi vérifier qu'une représentation cohomologique  $\pi = A((a^p), ((a+1)^p))$ , avec  $0 \leq a \leq q-1$ , du groupe  $G = SU(p, q)$  "standard" (c'est-à-dire provenant d'un vrai groupe unitaire sur un corps de nombre) devrait (toujours modulo l'hypothèse  $(\text{Hyp})$  pour  $SU(n, 1)$ ) toujours être **isolée** dans

$$\{\pi\} \cup \widehat{G}_{\text{Aut}}.$$

(On a en effet dans ce cas  $\rho^L = p$ ,  $\rho^H = q$  et  $\rho|_{\mathfrak{a}^H} = p+q-1$ .) De la même manière on peut également démontrer la légère généralisation suivante du Théorème 2 de [7] :

**Théorème 5.10** *Soit  $H \subset G$  une inclusion standard entre deux  $\mathbb{Q}$ -groupes semi-simples de rang réel 1. Supposons que le groupe  $H$  vérifie l'hypothèse  $(\text{Hyp}_\varepsilon)$ , pour un certain réel positif  $\varepsilon$ , alors le groupe  $G$  vérifie l'hypothèse  $(\text{Hyp}_{\rho^G - \rho^H + \varepsilon})$ .*

Puisque le groupe  $SU(2, 1)$  vérifie l'hypothèse  $(\text{Hyp}_{\frac{4}{5}})$ , il découle du Théorème 5.10 qu'un groupe  $SU(n, 1)$  "standard" vérifie l'hypothèse  $(\text{Hyp}_{n-6/5})$ . Les représentations cohomologiques de degré fortement primitif 1 sont donc isolées dans le dual automorphe. Dans le cas du groupe  $SU(n, 2)$ , il découle immédiatement du Corollaire 2.1 qu'une représentation cohomologique de degré fortement primitif  $\leq n-1$  est toujours isolée dans le dual unitaire. La représentation cohomologique de  $SU(n, 2)$  de bidegré fortement primitif  $(n, 0)$  :

$$A((1^n), (2^n))$$

est quant à elle non isolée dans le dual unitaire du groupe  $SU(n, 2)$ . Puisque  $2n - (n+2-1) = n-1 > n-6/5$ , l'hypothèse  $(\text{Hyp}_{n-6/5})$  pour le groupe  $SU(n, 1)$  "standard" et le Théorème 5.9 impliquent inconditionnellement :

**Théorème 5.11** *Soit  $G$  un groupe algébrique sur  $\mathbb{Q}$  obtenu, par restriction des scalaires, à partir d'un groupe unitaire sur un corps de nombres totalement réel (vrai groupe unitaire) et tel que  $G^{\text{nc}} = SU(n, 2)$ . Alors la représentation cohomologique holomorphe  $\pi$  de  $G$  de degré fortement primitif  $n$  est **isolée** dans*

$$\{\pi\} \cup \widehat{G}_{\text{Aut}}.$$

## Références

- [1] Jeffrey Adams, Dan Barbasch, and David A. Vogan, Jr. *The Langlands classification and irreducible characters for real reductive groups*, volume 104 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992.
- [2] Greg W. Anderson. Theta functions and holomorphic differential forms on compact quotients of bounded symmetric domains. *Duke Math. J.*, 50(4) :1137–1170, 1983.
- [3] James Arthur. Unipotent automorphic representations : conjectures. *Astérisque*, (171-172) :13–71, 1989. Orbites unipotentes et représentations, II.
- [4] N. Bergeron. Lefschetz properties for arithmetic real and complex hyperbolic manifolds. *Int. Math. Res. Not.*, (20) :1089–1122, 2003.
- [5] Nicolas Bergeron. Propriétés de Lefschetz automorphes pour les groupes unitaires et orthogonaux. arXiv :math.GR/0503062 v1 3 Mar 2005.
- [6] Nicolas Bergeron. Tentative d'épuisement de la cohomologie d'une variété de shimura par restriction à ses sous-variétés. arXiv :math.NT/0403407 v1 24 Mar 2004.
- [7] Nicolas Bergeron and Laurent Clozel. *Spectre automorphe des variétés hyperboliques et applications topologiques*. arXiv :math.NT/0411385 v1 17 Nov 2004.
- [8] A. Borel. Automorphic  $L$ -functions. In *Automorphic forms, representations and  $L$ -functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 27–61. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.
- [9] Armand Borel and Nolan R. Wallach. *Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups*, volume 94 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.
- [10] M. Burger, J.-S. Li, and P. Sarnak. Ramanujan duals and automorphic spectrum. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 26(2) :253–257, 1992.
- [11] M. Burger and P. Sarnak. Ramanujan duals. II. *Invent. Math.*, 106(1) :1–11, 1991.
- [12] William Casselman and Dragan Milićić. Asymptotic behavior of matrix coefficients of admissible representations. *Duke Math. J.*, 49(4) :869–930, 1982.
- [13] L. Clozel. Combinatorial consequences of Arthur's conjectures and the Burger-Sarnak method. *Int. Math. Res. Not.*, (11) :511–523, 2004.

- [14] Laurent Clozel. On the cohomology of Kottwitz's arithmetic varieties. *Duke Math. J.*, 72(3) :757–795, 1993.
- [15] Laurent Clozel. Démonstration de la conjecture  $\tau$ . *Invent. Math.*, 151(2) :297–328, 2003.
- [16] R. Howe.  $\theta$ -series and invariant theory. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, pages 275–285. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.
- [17] D. A. Každan. On the connection of the dual space of a group with the structure of its closed subgroups. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 1 :71–74, 1967.
- [18] A. W. Knap and Gregg J. Zuckerman. Classification of irreducible tempered representations of semisimple groups. *Ann. of Math. (2)*, 116(2) :389–455, 1982.
- [19] Anthony W. Knap. *Representation theory of semisimple groups*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001. An overview based on examples, Reprint of the 1986 original.
- [20] Bertram Kostant. On the existence and irreducibility of certain series of representations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75 :627–642, 1969.
- [21] S. Kumaresan. On the canonical  $k$ -types in the irreducible unitary  $g$ -modules with nonzero relative cohomology. *Invent. Math.*, 59(1) :1–11, 1980.
- [22] R. P. Langlands. On the classification of irreducible representations of real algebraic groups. In *Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups*, volume 31 of *Math. Surveys Monogr.*, pages 101–170. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [23] Jian-Shu Li. Theta lifting for unitary representations with nonzero cohomology. *Duke Math. J.*, 61(3) :913–937, 1990.
- [24] Jian-Shu Li. Nonvanishing theorems for the cohomology of certain arithmetic quotients. *J. Reine Angew. Math.*, 428 :177–217, 1992.
- [25] R. Parthasarathy. Criteria for the unitarizability of some highest weight modules. *Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A Math. Sci.*, 89(1) :1–24, 1980.
- [26] Vladimir Platonov and Andrei Rapinchuk. *Algebraic groups and number theory*, volume 139 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1994. Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen.
- [27] Joe Repka. Tensor products of unitary representations of  $SL_2(\mathbf{R})$ . *Amer. J. Math.*, 100(4) :747–774, 1978.
- [28] Atle Selberg. On the estimation of Fourier coefficients of modular forms. In *Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VIII*, pages 1–15. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965.
- [29] D. Shelstad. Embeddings of  $L$ -groups. *Canad. J. Math.*, 33(3) :513–558, 1981.
- [30] Birgit Speh and David A. Vogan, Jr. Reducibility of generalized principal series representations. *Acta Math.*, 145(3-4) :227–299, 1980.

- [31] Y. L. Tong and S. P. Wang. Geometric realization of discrete series for semisimple symmetric spaces. *Invent. Math.*, 96(2) :425–458, 1989.
- [32] Akshay Venkatesh. The Burger-Sarnak method and operations on the unitary dual of  $GL(n)$ . *Represent. Theory*, 9 :268–286 (electronic), 2005.
- [33] D. A. Vogan. Isolated unitary representations. to appear in the 2002 Park City summer school volume.
- [34] David A. Vogan, Jr. Unitarizability of certain series of representations. *Ann. of Math. (2)*, 120(1) :141–187, 1984.
- [35] David A. Vogan, Jr. The unitary dual of  $GL(n)$  over an Archimedean field. *Invent. Math.*, 83(3) :449–505, 1986.
- [36] David A. Vogan, Jr. and Gregg J. Zuckerman. Unitary representations with nonzero cohomology. *Compositio Math.*, 53(1) :51–90, 1984.
- [37] Nolan R. Wallach. *Real reductive groups. I*, volume 132 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.

Unité Mixte de Recherche 8553 du CNRS,  
Département de mathématiques et applications (DMA),  
45, rue d’Ulm 75230 Paris Cedex 05, France  
*adresse électronique* : `Nicolas.Bergeron@ens.fr`